

Dört Boyutlu Ising Model İçin Sonlu Örgülerde Zaman Adımı Etkisi

Abdullah GÜNEN¹

Özet: Dört boyutlu Ising model sonlu örgülerde Creutz Cellular automaton ile simule edildi. Simulasyonlar 1.2×10^5 ve 9.6×10^5 zaman adımlarında gerçekleştirilerek termodinamik nicelikler üzerinde zaman adımı uzunluğunun etkisi incelendi. Kendiliğinden mıknatıslanma, (düzen parametresi) manyetik alınganlık ve öz ısının kritik sıcaklıkları tesbit edilerek statik kritik üsler bulundu. Bu kritik üsler farklı zaman adımları için karşılaştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Ising Model; Cellular Automaton; Kritik üsler.

The EffectT Of Time-Steps In The Finite-Lattices For The Four- Dimensional Ising Model

Abstract: The four-dimensional Ising model is simulated on the Creutz Cellular automaton. Simulations are carried out for 1.2×10^5 and 9.6×10^5 time steps and the effect of this time steps on the thermodynamics quantities are investigated. After obtaining the order parameter, the magnetic susceptibility and specific heat, the static critical exponents are found and these critical exponents are computed with each other for different time steps.

Keywords: Ising Model; Cellular Automata; Critical Exponents.

Giriş

M. Creutz, [1] tarafından sunulan cellular automaton Ising algoritmasının kritik bölge yakınında Ising model araştırmaları için alternatif bir yöntem olabileceği çeşitli çalışmalarda gösterilmiştir [2-7].

Creutz cellular automaton ile dört boyutlu Ising model için yapılan çalışmalarda sonlu örgülerde yapılan hesaplamalardan sonsuz örgü davranışını tespit etmek amacıyla sonsuza ekstrapolasyon tekniği kullanılmıştır. Bu çalışmada dört boyut için $L=4,6,8,10$ örgülerinde farklı zaman adımlarında (1.2×10^5 ve 9.6×10^5 monte carlo adımı) kritik sıcaklık ve buna bağlı olarak statik kritik üsler bulunmuştur. Hesaplamalarda her nokta üç setin ortalamasıdır. Sonsuz örgü

¹ Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Biyoloji Bölümü, Kampüs (42031) KONYA

davranışı sonsuza ekstrapolasyon yöntemiyle tesbit edilmiştir. Bu yöntem sonlu örgülerde termodinamik nicelikler kritik üsleri kendi kritik sıcaklıklarında, kritik üslerin belirlenmesi ve sonsuz örgü kritik üs değerinin aşağıdaki ifade yardımıyla tesbit edilmesi prensibine dayanmaktadır.

$$\Gamma(L) = \Gamma(\infty) + 1/L$$

Burada Γ ilgili kritik üstür. Bu çalışmada teori Bölüm.2 de, tartışma ve sonuçlar Bölüm .3 de, sonuçlar ise Bölüm.4 de verilmiştir.

Teori

Her bir hücreye beş ikili bit karşılık getirilmektedir. Bir hücredeki değişkenlerin alacağı değer bir önceki zaman adımındaki kendi değeri ile ona en yakın komşularındaki değişkenlerin değerlerinden aşağıda verilen kurallara göre belirlendi.

Her hücredeki beş ikili "bit" ten ilki B_i Ising spinidir. "0" veya "1" değerini alabilir. $S_i = 2B_i - 1$ olmak üzere sistemin Ising spin enerjisi H_i , (J en yakın komşu etkileşme sabiti birimlerinde olmak üzere) aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$H_i = - \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \quad (1)$$

Burada $\langle ij \rangle$ bütün en yakın komşu hücre çiftleri üzerinden toplamı göstermektedir. Diğer dört bit üçü "demon" veya spine eşlik eden momentuma karşılık gelmektedir. Bu üç "bit" (0,7) arasında değerler alabilen bir tam sayı oluşturmaktadır. Yerleşik "demon" a (cin) ait kinetik enerji bu tam sayı değerlerinin dört katını almaktadır. Sistemin toplam enerjisi

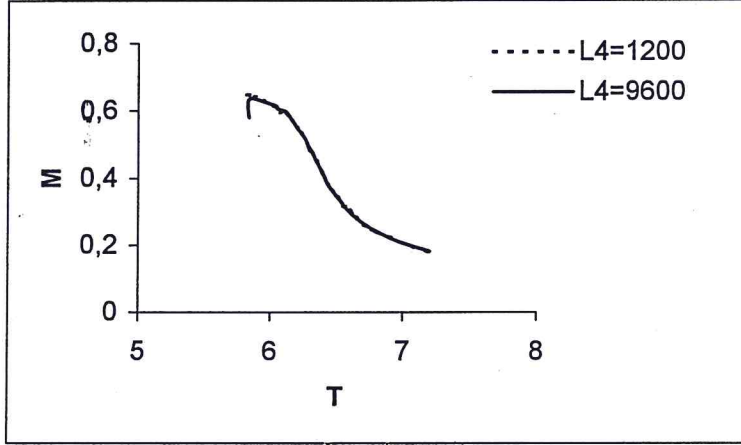
$$H = H_i + H_k \quad (2)$$

Korunumludur. Burada H_k örgünün kinetik enerjisidir. Verilen bir toplam enerji için sistemin sıcaklığı T, (J/k_B birimlerinde olup. k_B boltzman sabitidir) kinetik enerjinin ortalama değerinden elde edilir. Beşinci "bit" "Cellular automaton" ın zamanla dama tahtası düzeninde gelişimini sağlar ve bu yüzden, bu durum Cellular automaton ile Ising modelin simülasyonuna izin verir. Her bir zaman adımında dama tahtasının siyah hücrelerine kural uygulanıp rengi beyaza çevrilir. Beyaz hücrelerin ise, kural uygulanmaksızın, sadece rengi siyaha çevrilir. Spinler ve spine eşlik eden momentum değişkenleri için yenilenme kuralları aşağıdaki gibidir: Bir hücrenin yenilenebilmesi için spini ters çevrilir. Sistemin Ising enerjisindeki (iç enerji) değişim hesaplanır. Toplam enerji H korunmak üzere, eğer sistemin iç enerjisindeki bu hücreye ait momentum değişkenine verilebilecek veya alınabilecek bir miktarda ise, o zaman bu spin yönünde değişiklik yapılır ve buna uygun olarak da momentum değiştirilir. Aksi halde spin yönü ve momentumu değiştirilmez. Başlangıçta sistemin bütün spinleri aşağı ve yukarı yönde alınırlar. İlk kinetik enerji beyaz hücrelerdeki momentum değişkenlerinin "bit" leri vasıtasıyla örgüye rasgele verilir. "Demon" enerjisinin hesabı yapılırken "bit" sayısı göz önünde bulundurulur. Çünkü "demon" alacağı enerji değerleri "bit" sayısına bağlı olarak değişmektedir. Başlangıçta "demon" için kinetik enerjinin değeri 20 dir. (J birimlerinde)

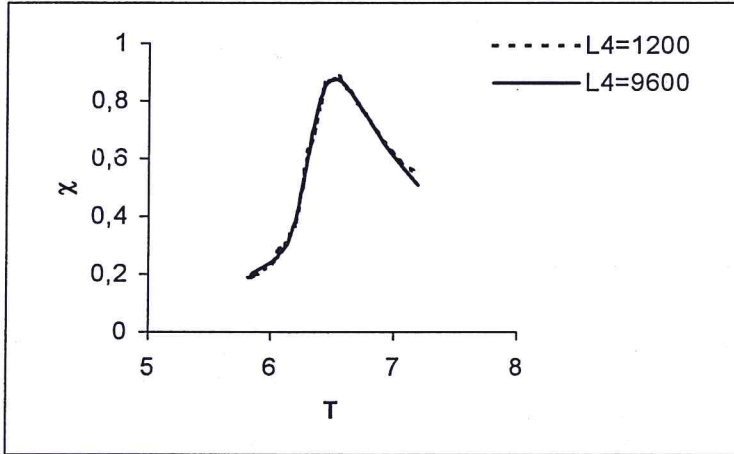
Simülasyonlar periyodik bağ koşulu ile $4 \leq L \leq 16$ lineer boyutlarda L^4 basit hiperküp örgülerde başarılıdır.

Sonuç Ve Tartışmalar

Kendiliğinden mıknatıslanma (M) ve manyetik alınganlık (χ)'nin farklı zaman adımlarında (1.2×10^5 ve 9.6×10^5) sıcaklıkla değişim grafikleri $L=4$ örgüsü için Şekil 1'de ve $L=10$ örgüsü için Şekil 2'de verilmiştir. Şekil 1'den görüleceği gibi $L=4$ kenar uzunluğuna sahip bir örgü için termodinamik niceliklerin hesabında, seçilen zaman adımlarının açık bir etkisi olmadığı görülmektedir. Ancak Şekil 2'de

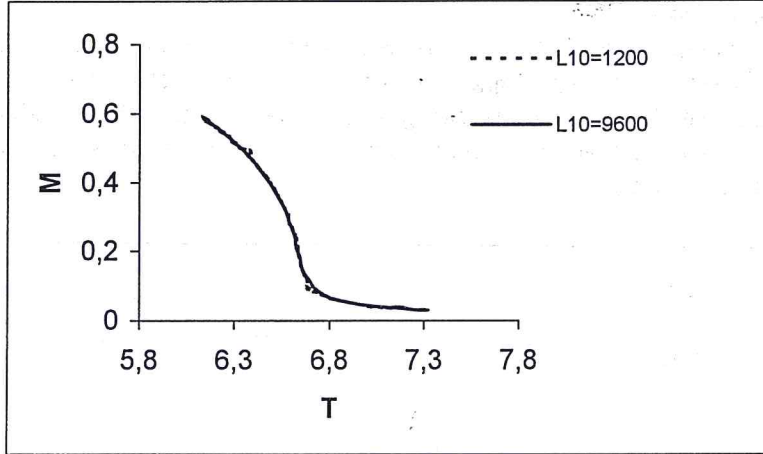


(a)

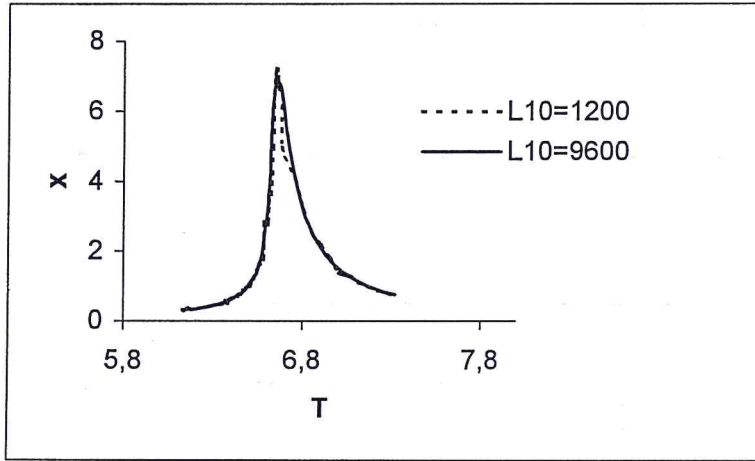


(b)

Şekil1. (a) Kendiliğinden mıknatıslanma (M) ve (b) Manyetik alınganlık (χ)'nin $L=4$ kenar uzunluklu sonlu boyutlu örgünün sıcaklığa karşı değişim grafiği.



(a)



(b)

Şekil2. (a) Kendiliğinden mıknatıslanma (M) ve (b) Manyetik alınganlık (χ) 'nin L=10 kenar uzunluklu sonlu boyutlu örgünün sıcaklığa karşı değişim grafiği.

L=10 örgüsü için verilen grafikler incelendiğinde 1.2×10^5 zaman adımı üzerinden ortalama alınarak elde edilen verilerin sıcaklıkla değişimleri fonksiyonel bir davranış göstermekle birlikte dalgalanmalar sergilenmektedir. Yani belirlenen davranıştan sapmalar gözlenmektedir. 9.6×10^5 zaman adımında ise veriler beklenildiği gibi sapma göstermeksizin fonksiyonel davranışa uymaktadır. Fonksiyonel davranışlar incelendiğinde 1.2×10^5 zaman adımındaki ortalamaların L \geq 10 örgülerde yetersiz kaldığı görülmektedir.

Daha gerçekçi bir karşılaştırma yapmak için bu termodinamik niceliklerin fonksiyonel davranışını belirleyen β ve γ kritik üslerin seçilen zaman adımlarında hesaplanması gerekir. Bu hesaplamaları yapmak için, kendiliğinden mıknatıslanma (M)'nin ve manyetik alınganlık (χ)'nin sıcaklıkla değişim fonksiyonları d=4 boyutlu örgüler için verilen

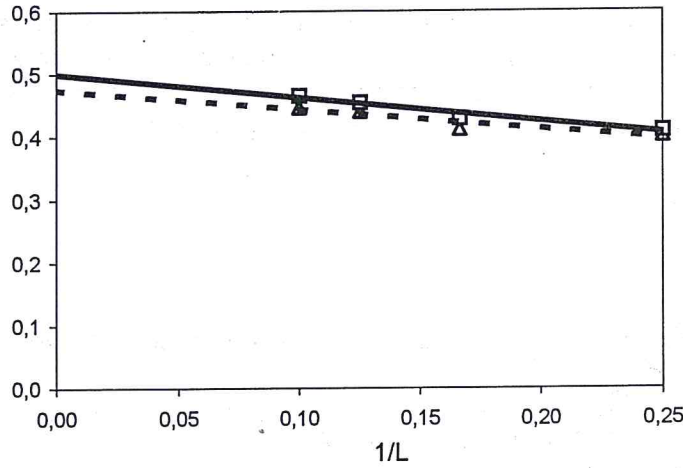
$$M \propto \varepsilon^\beta \text{Log}^{1/3} \varepsilon \quad T < T_c, \quad T \rightarrow T_c \quad (3)$$

$$\chi \propto \varepsilon^{-\gamma} \text{Log}^{1/3} \varepsilon \quad T < T_c, \quad T \rightarrow T_c \quad (4)$$

ifadeleri kullanılmaktadır [6]. Burada T_c kritik sıcaklık, ε ($\varepsilon = |T - T_c| / T_c$) indirgenmiş sıcaklık, β ve γ kritik üslerdir. β ve γ sırasıyla $d=4$ boyut için renormalizasyon gurup teoriye ile 0.5 ve 1 olarak tesbit edilmiştir [6]. T_c için T_c^x değeri kullanılarak örgülerin $\beta(L)$ kritik üsleri Eşitlik 3'den farklı zaman adımlarına göre ayrı ayrı hesap edilerek tablo 1'de verilmiştir. Tablo 1'deki veriler incelendiğinde $L=4,6,8,10$ örgüleri için bulunan $\beta(L)$ kritik üs değerlerinden, 9.6×10^5 zaman adımı için verilen değerler, β 'nin beklenen, 0.5 değerine daha yakın olduğu görülmektedir. β 'nin sonsuz örgü değerini bulmak için $\beta(L)$ 'nin $1/L$ ye karşı $1/L \rightarrow 0$ için ekstrapolasyonu yapılmaktadır. Bu ekstrapolasyon grafiği Şekil 3'de verilmiştir. Şekil 3'deki veriler incelendiğinde 1.2×10^5 zaman adımında $\beta=0.474$ değeri, 9.6×10^5 zaman adımında $\beta=0.5001$ değeri bulunmaktadır. Bu sonuçlardan da görülebileceği gibi 9.6×10^5 zaman adımından bulunan 0.5001 değeri renormalizasyon gurup teori ile tespit edilen 0.5 değeri ile çok iyi bir şekilde uyuşmaktadır.

Tablo 1. Sonsuz örgü yaklaşımı için, farklı zaman adımlarında $L=4,6,8,10$ örgüleri için $\beta(L)$ ve $\gamma(L)$ kritik üs değerleri.

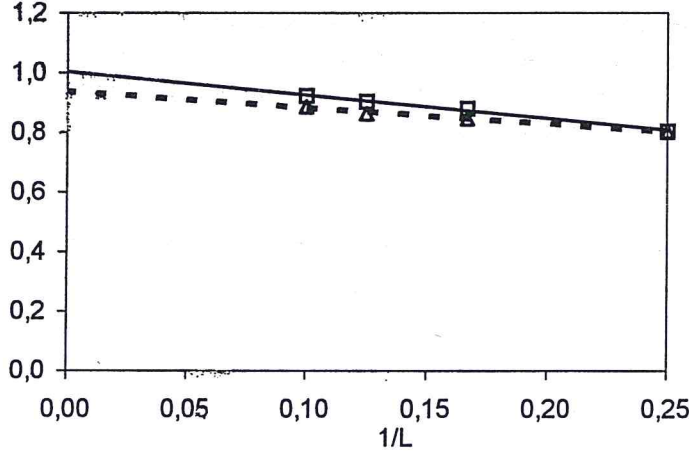
Zaman adımı	1.2×10^5	9.6×10^5	1.2×10^5	9.6×10^5
L	$\beta(L)$	$\beta(L)$	$\gamma(L)$	$\gamma(L)$
4	0.4016	0.4092	0.8290	0.8528
6	0.4122	0.4292	0.8465	0.8629
8	0.4404	0.4548	0.8645	0.9039
10	0.4465	0.4654	0.8872	0.9224



Şekil 3. $\beta(L)$ nin $1/L$ 'ye karşı değişim grafiği. $1/L \rightarrow 0$ için 1.2×10^5 zaman adımında $\beta=0.474$ (Δ) değeri, 9.6×10^5 zaman adımında ise $\beta=0.5001$ (\square) değeri bulunmuştur.

T_c için T_c^x değeri kullanılarak örgülerin γ kritik üsleri, Eşitlik 4'den farklı zaman adımlarına göre ayrı ayrı hesap edilerek Tablo 1'de verilmiştir. Tablo 1'deki veriler incelendiğinde $L=4,6,8,10$ örgüleri için $\gamma(L)$ kritik üs değerlerinden, 9.6×10^5 zaman adımı için verilen değerler, γ 'nin beklenen, 1 değerine daha yakın olduğu görülmektedir. γ 'nin sonsuz örgü değerini bulmak için

$\gamma(L)$ 'nin $1/L$ 'ye karşı $1/L \rightarrow 0$ için ekstrapolasyonu yapılmaktadır. Bu ekstrapolasyon grafiği Şekil 4'de verilmiştir. Şekil 4'deki veriler incelendiğinde 1.2×10^5 zaman adımında $\gamma=0.9434$ değeri, 9.6×10^5 zaman adımında $\gamma=1.0039$ değeri bulunmaktadır. Bu sonuçlardan da görülebileceği gibi 9.6×10^5 zaman adımında bulunan 1.0039 değeri renormalizasyon gurup teori ile çok iyi bir şekilde uyumaktadır.



Şekil 4. $\gamma(L)$ nin $1/L$ 'ye karşı değişim grafiği. $1/L \rightarrow 0$ için 1.2×10^5 zaman adımında $\gamma=0.9434$ (Δ) değeri, 9.6×10^5 zaman adımında ise $\gamma=1.0039$ (\square) değeri bulunmuştur.

Sonuç

Dört boyutlu Ising model sonlu örgülerde Creutz Cellular automton ile simule edildi. Simulasyonlar 1.2×10^5 ve 9.6×10^5 zaman adımında gerçekleştirilerek termodinamik nicelikler, β ve γ kritik üslerin zaman adımı etkisi incelendi. Bulunan sonuçlar 1.2×10^5 zaman adımından elde edilen veriler, kritik üslerin tespitinde $L < 10$ örgüleri için yeterli, ancak $L \geq 10$ örgüler için ise yetersiz olduğunu göstermektedir. Ancak 9.6×10^5 zaman adımından elde edilen veriler, kritik üslerin tespitinde $L < 10$ ve $L \geq 10$ örgüleri için de yeterli olduğunu göstermektedir.

Kaynaklar

1. M. Creutz, *Ann. Phys.* 167,62 (1986).
2. B. Kutlu and N. Aktekin, *J. Stat. Phys.* 75, 757 (1994); B. Kutlu and N. Aktekin, *Physica A* 208, 423 (1994);).
3. B. Kutlu and N. Aktekin *Physica A* 215, 370 (1995);
4. C. Dress, *J. Phys. A* 28, 7051 (1995).
5. N. Aktekin *Physica A* 219, 436 (1995); N. Aktekin, *Int. J. Mod. Phys. C* 8, 287 (1997); N. Aktekin, to be published; B. Kutlu, *Physica A* 234, 807 (1997); B. Kutlu, *Physica A* 232, 397 (1996).
6. N. Aktekin, *Physica A* 232, 397 (1996).
7. N. Aktekin, A. Günen and Z. Sağlam, *International Journal of Phys. C* 10, 875 (1999).