Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **18** (2018) 011301(118-124) AKU J. Sci. Eng. **18** (2018) 011301 (118-124)
DOI: 10.5578/fmbd.66550

SEMİNORMLU UZAYLARDA $B_g(p,F,q,s)$ DİZİ UZAYI[1]

Kamil AKBAYIR[2], Tunay BİLGİN[2]
[2]*Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Van.*
e-posta: kamilakbayir@yyu.edu.tr

Geliş Tarihi:19.04.2017 ; Kabul Tarihi:27.02.2018

Anahtar kelimeler
Modulus fonksiyonu, Dizi uzayları, Topoloji.

Özet

Bu çalışmada $F=(f_k)$ bir modulus fonksiyon dizisi, $p=(p_k)$ pozitif terimli bir dizi ve $A=(a_{mk})$ pozitif terimli sonsuz bir matris olmak üzere $B_g(p,F,q,s)$ dizi uzayı tanımlanarak, bu uzayın bazı Topolojik özellikleri ve uzayla ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

$B_g(p,F,q,s)$ Sequence Space On The Spaces With Seminorm

Keywords
Modulus function, Sequence spaces, Topologi.

Abstract

In this work we introduce a new $B_g(p,F,q,s)$ sequence space that consists of $F=(f_k)$ a modulus function, $p=(p_k)$ a sequence with positive terms and $A=(a_{mk})$ a matrix with positive terms, and study some topological properties of this space and some inclusion relations related to this space.

1. Giriş

Nakano (1953) tarafından ortaya atılan modulus fonksiyonu fikri dizi uzayları çalışmasına yeni bir boyut kazandırdı. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan f fonksiyonuna bir modulus fonksiyonu denir (Nakano, 1953).

i) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

ii) Her $x,y>0$ için $f(x+y)\le f(x)+f(y)$,

iii) f, artan,

iv) f, 0 da sağdan süreklidir.

f modulus fonksiyonu sınırlı ve sınırsız olabilir. (ii) den $|f(x)-f(y)|\le f(x-y)$ ve (iv) den f nin $[0,\infty)$ üzerinde her yerde sürekli olduğu görülür.

$F=(f_k)$ modulus fonksiyonların dizisi olsun. Aşağıda vereceğimiz şartlar ileride kullanılacaktır.

(M1) $\sup_k f_k(t)<\infty,\ \forall t>0$ *için*;

(M2) $\lim_{t\to 0} f_k(t)=0$, ($k\ge 1$ için düzgün) (Kolk, 1990).

Maddox (1986), kuvvetli Cesàro toplanabilme tanımının genelleştirmesi olan, moduluse göre kuvvetli Cesàro toplanabilen dizilerin sınıfını, $w(f)$ olarak tanımladı. Connor (1989), Maddox (1986)'nın tanımını Cesàro matrisi yerine herhangi negatif olmayan regüler matris alarak $w(A,f)$ toplanabilme metoduna genelleştirdi.

Şahiner (2002) tarafından yarınormlu uzay üzerinde; f bir modulus fonksiyon ve $p=(p_k)$ pozitif

[1] Bu çalışma Kamil AKBAYIR (2003)'ün "Modulus Fonksiyon Dizileri Yardımıyla Tanımlanmış Bazı Dizi Uzayları" başlıklı doktora tez çalışmasının bir bölümünü içermektedir.

terimli bir dizi olmak üzere $B_g\left(p,f,q,s\right)$ dizi uzayını tanımlandı.

Biz bu çalışmamızda Şahiner (2002) tarafından çalışılmış $B_g(p,f,q,s)$ dizi uzayını, $F=(f_k)$ modulus fonksiyon dizisi yardımıyla genelleştirilerek $B_g(p,F,q,s)$ dizi uzayını inşa edip bazı özelliklerini vereceğiz.

Şunu belirtelim ki, modulus fonksiyon yardımıyla bir çok uzay oluşturulmuştur (Banerji and Galiz, 2000; Soomer, 2000; Esi, 2000; Kolk, 1997, 1990, 1998, 1999, 2013; Esi and Et, 1996; Pehlivan and Fisher, 1995; Gupta and Bhola, 1975; Bilgin, 1994, 1996, 2004; Bilgin ve Altun, 2007; Raj and Sharma, 2011; Karakaya ve Şimşek, 2004; Bhardwaj and Bala, 2009; Işık, 2011 ve diğerleri).

2. Materyal ve Metot

Tanım 2.1. $q_1\ ve\ q_2$ X üzerinde iki yarınorm olsun. q_1 kuvvetli q_2 olması için gerek ve yerer şart $\forall u\in X$ alındığında,

$$q_2(u)\le Mq_1(u)$$

olacak şekilde M sabitinin var olmasıdır (Wilansky, 1964).

Eşitsizlikler 2.1.
$a,a_1,a_2,...,a_m\ge 0\ ve\ b,b_1,b_2,...,b_m\ge 0$ olsun. Bu taktirde,

a) i>1 ve $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{j}=1\ ise,$

$$\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\le\left\{\sum_{k=1}^{m}a_k^i\right\}^{1/i}\left\{\sum_{k=1}^{m}b_k^j\right\}^{1/j}\ \text{Hölder Eşitsizliği)}$$

b) i ≥1 ise,

$$\left\{\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^i\right\}^{1/i}\le\left\{\sum_{k=1}^{m}a_k^i\right\}^{1/i}+\left\{\sum_{k=1}^{m}b_k^i\right\}^{1/i}$$

(Minkowski Eşitsizliği)

c) 0 < i ≤ 1 ise,

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^i\le\sum_{k=1}^{m}a_k^i+\sum_{k=1}^{m}b_k^i$$

d) i>1 ve $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{j}=1\ ise,\ |a.b|\le|a|^i+|b|^j$ dir.

Eşitsizlikler 2.2. Her k için, $p_k>0\ ve\ H=\sup_k p_k$ olmak üzere $a_k,b_k\in\mathbb{C}$ olsun. Bu taktirde,

a)

$$|a_k+b_k|^{p_k}\le C\left\{|a_k|^{p_k}+|b_k|^{p_k}\right\},\ C=\max(1,2^{H-1})$$

dir.

b) $|\lambda|^{p_k}\le\max\left(1,|\lambda|^H\right)$

3. Bulgular

3.1. $B_g(p,F,q,s)$ Dizi Uzayı ve Bazı Özellikleri

$p=(p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $F=\left(f_k\right)$ modulus fonksiyon dizisi olsun. Buna göre,

$$B_g(p,F,q,s)=\left\{x=(x_k)\in S(X):\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}<\infty,s\ge 0\right\}$$

şeklinde $B_g(p,F,q,s)$ dizi uzayını tanımlanır.

Burada $\forall k$ için $f_k=f$ seçilirse $B_g(p,F,q,s)$ dizi uzayının özel bir durumu olan,

$$B_g(p,f,q,s)=\left\{x=(x_k)\in S(X):\sum_k k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}<\infty,s\ge 0\right\}$$

uzayı elde edilir. Ayrıca $p,\ f\ ve\ s$ den bir ya da bir kaçı özel seçilirse aşağıdaki uzaylar elde edilir:

$$B_g\left(p,q,s\right)=\left\{x=(x_k)\in S(X):\sum_k k^{-s}\left[q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right]^{p_k}<\infty,s\ge 0\right\}$$

$$B_g\left(F,q,s\right)=\left\{x=(x_k)\in S(X):\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]<\infty,s\ge 0\right\}$$

$$B_g\left(p,F,q\right)=\left\{x=(x_k)\in S(X):\sum_k\left[f_k\left(q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}<\infty,\right\}$$

$$B_g\left(p,q\right)=\left\{x=(x_k)\in S(X):\sum_k\left[q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right]^{p_k}<\infty,\right\}$$

$$B_g\left(F,q\right)=\left\{x=(x_k)\in S(X):\sum_k\left[f_k\left(q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]<\infty,\right\}$$

Lemma 3.1. $B_g(p,F,q,s)$ lineer uzaydır.

İspat: $x,y\in B_g(p,F,q,s)$ ve $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ olsun. Eşitsizlik 2.2(a) ve tanım 2.2 kullanılarak,

$$k^{-s}\left\{f_k\left(q\left(\lambda x_k+\mu y_k-\lambda x_{k+1}-\mu y_{k+1}\right)\right)\right\}^{p_k}$$
$$\le k^{-s}\left\{f_k\left(q\left(\left(\lambda x_k-\lambda x_{k+1}\right)+\left(\mu y_k-\mu y_{k+1}\right)\right)\right)\right\}^{p_k}$$
$$\le k^{-s}\left\{f_k\left(q\left(\lambda x_k-\lambda x_{k+1}\right)\right)+f_k\left(q\left(\mu y_k-\mu y_{k+1}\right)\right)\right\}^{p_k}$$
$$=k^{-s}\left\{f_k\left(|\lambda|q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)+f_k\left(|\mu|q\left(y_k-y_{k+1}\right)\right)\right\}^{p_k}$$
$$\le k^{-s}C\left\{\left[f_k\left(|\lambda|q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}+\left[f_k\left(|\mu|q\left(y_k-y_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}\right\}$$
$$\le C\left\{1+\left[|\lambda|\right]\right\}^H k^{-s}\left[f_k\left(q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}$$
$$+C\left\{1+\left[|\mu|\right]\right\}^H k^{-s}\left[f_k\left(q\left(y_k-y_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte de k=1 den ∞ a toplam alınırsa,

$$\lambda x+\mu y\in B_g(p,F,q,s)$$

olduğu görülür.

Lemma 3.2. Herhangi bir k sabiti için $F=(f_k)$ modulus fonksiyonunun bir dizisi ve 0<δ<1 olsun. Bu taktirde $v,k\in IN$ ve $t\in[0,\infty)$ için,

$$f_k^{v-1}(t)>\delta \ ise \ f_k^{v}(t)\le\frac{2f_k(1)}{\delta}\left\{f_k^{v-1}(t)\right\}$$

olur. Burada $f_k^0=I$ özdeşlik dönüşümüdür.

İspat: 0<δ<1, $v\in IN$ ve $t\in[0,\infty)$ için $f_k^{v-1}(t)>\delta$ olsun. 0<δ<1 olduğundan,

$$f_k^{v-1}(t)=\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}\le 1+\left[\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}\right]$$

olur. Bu eşitsizliğe f_k modulusünü uygularsak,

$$f_k\left(f_k^{v-1}(t)\right)\le f_k\left(1+\left[\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}\right]\right)$$
$$f_k^{v}(t)\le\left\{1+\left[\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}\right]\right\}f_k(1)\le\left\{\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}+\frac{f_k^{v-1}(t)}{\delta}\right\}f_k(1)=\frac{2f_k(1)}{\delta}\left\{f_k^{v-1}(t)\right\}$$

Teorem 3.1.

$$B_g(p,F,q,s)=\left\{x=(x_k)\in S(X):\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}<\infty, s\ge 0\right\}$$

M=max(1,H) iken

$$g(x)=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}\left[f_k\left(q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

ile bir paranormlu uzaydır.

İspat: Bütün $x,y\in B_g(p,F,q,s)$ için $\Theta=(\theta,\theta,...)$ iken $g(\Theta)=0$ ve $g(-x)=g(x)$ olduğu açıktır. Bütün k lar ve M≥1 için $\frac{p_k}{M}\le 1$ iken g nin alt toplamsallığı Eşitsizlik 2.1(b),-2.2(a) ve tanım 2.2 den görülür. Şimdi $x=(x^n)$, $B_g(p,F,q,s)$ de herhangi bir dizi ve $\lambda=(\lambda^n)$ skalerlerin dizisi olsun. Kabul edelim ki, $\lambda^n\to\lambda^o \ ve \ g(x^n-x^o)\to 0, \ (n\to\infty)$ olsun. Bu durumda,

$$g(\lambda^n x^n-\lambda^o x^o)\le K^{H/M}g(x^n-x^o)$$
$$+\left\{\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^o\right]\left(x_k^o-x_{k+1}^o\right)\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} \qquad (1)$$

eşitsizliği elde edilir. $K^{H/M}$ sabiti vardır. $g(x^n-x^o)\to 0, \ (n\to\infty)$ olduğundan (1) in ilk kısmı sıfıra gider. İkinci kısım ise $\forall n\in IN$ için $\lambda^n\to\lambda^0$, $(n\to\infty)$ olduğundan bazı T≥0 tamsayısı vardır öyle ki, $\left|\lambda^n-\lambda^o\right|\le T$ ve de $Tx^o=Tx_k^o\in B_g(p,F,q,s)$ olur. Böylece Eşitsizlik 2.1(c) den

$$\left\{\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^o\right]\left(x_k^o-x_{k+1}^o\right)\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$
$$\le\left\{\sum_k^{k_o}k^{-s}\left[f_k\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^o\right]\left(x_k^o-x_{k+1}^o\right)\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$
$$+\left\{\sum_{k\rangle k_o}k^{-s}\left[f_k\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^o\right]\left(x_k^o-x_{k+1}^o\right)\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

olur. Böylece ∀ε>0 için bazı k_o vardır öyle ki, her bir $n\in IN$ için,

$$\left\{\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^o\right]\left(x_k^o-x_{k+1}^o\right)\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$\leq\left\{\sum_{k\rangle k_o} k^{-s}\left[f_k\left(Tq\left(x_k^o-x_{k+1}^o\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{k_o} k^{-s}\left[f_k\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^o\right]\left(x_k^o-x_{k+1}^o\right)\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{k_o} k^{-s}\left[f_k\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^o\right]\left(x_k^o-x_{k+1}^o\right)\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}=0$$

elde edilir. Aynı ε için $n_0\in IN$ vardır öyle ki her bir $n>n_o$ için

$$\left\{\sum_{k=1}^{k_o} k^{-s}\left[f_k\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^o\right]\left(x_k^o-x_{k+1}^o\right)\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. (1) deki ikinci kısım sıfıra gider ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2. Bütün k lar için $q(x_{k+1})\leq Kq(x_k)$ olacak şekilde bazı K pozitif reel sayısı varsa bu durumda

$$l(p,F,q,s)\subset B_g(p,F,q,s)$$

olur.

İspat: $x\in l(p,F,q,s)$ olsun. Her bir k için eşitsizlik 2.2(a) kullanılarak,

$$k^{-s}\left[f_k\left(q\left(x_k-x_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}\leq k^{-s}C\left[f_k\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k}+k^{-s}C\left[f_k\left(q\left(x_{k+1}\right)\right)\right]^{p_k}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafının k üzerinden toplamı alınırsa sonlu olduğu görülür, sol tarafta aynı şekilde sonludur. Böylece $x\in B_g(p,F,q,s)$ olur.

Sonuç 3.1. Teorem 3.2'nin şartları altında,

$$M\left[l\left(p,F,q,s\right)\right]\subseteq M\left[B_g\left(p,F,q,s\right)\right]$$

olur.

Sonuç 3.2.

$$l_\infty\left(p,F,s\right)=\left\{a=(a_k):\sup_k k^{-s}\left[f_k\left(\left|a_k\right|\right)\right]^{p_k}<\infty,\ s\geq 0\right\}$$

ise $l_\infty\left(p,F,s\right)\cap B_g\left(p,F,q,s\right)\neq\phi$ sağlanır.

İspat: Sonuç 3.1 ve $M\left[l\left(p,F,q,s\right)\right]\subseteq l_\infty\left(p,F,s\right)$ kapsamından açıktır.

Teorem 3.3. $F=(f_k), G=(g_k)\,ve\,H=(h_k)$ modulus fonksiyon dizileri, q,q_1,q_2 yarı normlar, $s,s_1,s_2\geq 0$ ve (M1), (M2) şartları sağlansın. Bu durumda,

i) $s>1$ olsun. Bu durumda,

$$B_g\left(p,G,q,s\right)\subseteq B_g\left(p,FoG,q,s\right)$$

ii)

$$B_g\left(p,G,q,s\right)\cap B_g\left(p,H,q,s\right)\subseteq B_g\left(p,G+H,q,s\right)$$

iii)

$$B_g\left(p,F,q_1,s\right)\cap B_g\left(p,F,q_2,s\right)\subseteq B_g\left(p,F,q_1+q_2,s\right)$$

iv) Eğer q_1,q_2 den daha kuvvetli ise bu durumda,

$$B_g\left(p,F,q_1,s\right)\subseteq B_g\left(p,F,q_2,s\right)$$

v) Eğer $\sup_k\frac{g_k(t)}{h_k(t)}<\infty,\ \forall t>0$ ise bu durumda,

$$B_g\left(p,H,q,s\right)\subseteq B_g\left(p,G,q,s\right)$$

vi) Eğer $s_1\leq s_2$ ise bu durumda,

$$B_g\left(p,F,q,s_1\right)\subseteq B_g\left(p,F,q,s_2\right)$$

İspat: i) f_k sıfırda sağdan sürekli olduğundan (M2) den ε >0 için 0<δ<1 olacak şekilde ∃δ >0 ∍ 0≤t≤δ iken $f_k(t)<\varepsilon$ dur.

$I_1=\left\{k\in IN: g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\leq\delta\right\}$,

$I_2=\left\{k\in IN: g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)>\delta\right\}$ dersek Lemma 3.2'nin ispatındaki metod kullanılırsa (M1) den, $g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)>\delta$ iken

$$f_k\left(g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right)\leq\left\{2f_k(1)/\delta\right\}g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)$$

elde edilir. Böylece $x\in B_g(p,G,q,s)$ ve s >1 için,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k og_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}=\sum_{k\in I_1}k^{-s}\left[f_k og_k\left(q(x_k+x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$

$$+\sum_{k\in I_2}k^{-s}\left[f_k og_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\sum_{k\in I_1}k^{-s}\left[\varepsilon\right]^{p_k}+\sum_{k\in I_2}k^{-s}\left[\left\{2f_k(1)/\delta\right\}g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq\max(e^1,e^2)\sum_k k^{-s}+\max(d^1,d^2)\sum_k k^{-s}\left[g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}<\infty$$

olur. Burada

$e^1=\varepsilon^{\inf p_k}$, $e^2=e^M$, $d^1=\{2f_k(1)/\delta\}^{\inf p_k}$, $d^2=\{2f_k(1)/\delta\}^M$

şeklindedir. Böylece $x\in B_g(p,FoG,q,s)$ olduğu gösterilmiş olur.

ii) Her bir k için eşitsizlik 2.2(a) kullanılarak,

$$\left[(g_k+h_k)\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}=\left[g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)+h_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq C\left[g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}+C\left[h_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$

ve $\forall k\ i\c{c}in\ k^{-s}>0$ olduğundan,

$$k^{-s}\left[(g_k+h_k)\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$
$$\leq Ck^{-s}\left[g_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}+Ck^{-s}\left[h_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Burada k=1 den ∞'a kadar toplam alırsak,

$$x\in B_g(p,G+H,q,s)$$

olduğu görülür.

iii) Bu da (ii) dekine benzer olarak,

$$k^{-s}\left[f_k\left((q_1+q_2)(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$
$$\leq Ck^{-s}\left[f_k\left(q_1(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}+Ck^{-s}\left[f_k\left(q_2(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliğinden elde edilir.

iv) q_1 kuvvetli q_2 ise Tanım 2.1 den $\forall k$ ve $x_k\in X$ için $q_2(x_k)\leq Kq_1(x_k)$ olacak şekilde K pozitif tamsayısı bulunabilir. Böylece, $x\in B_g(p,F,q_1,s)$ ise,

$$\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q_2(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}\leq\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(Kq_1(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$
$$\leq K^M\sum_k k^{-s}\left[f_k\left(q_1(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}<\infty$$

olur ki, bu da $x\in B_g(p,F,q_2,s)$ demektir.

v) $\sup_k \dfrac{g_k(t)}{h_k(t)}<\infty,\ \forall t>0$ olsun. Bu durumda $\forall t\in[0,\infty)$ için $\dfrac{g_k(t)}{h_k(t)}\leq K$ olacak şekilde K>1 sabiti vardır. $\forall k$ için

$$\frac{g_k(q(x_k-x_{k+1}))}{h_k(q(x_k-x_{k+1}))}\leq K$$

ve dolayısıyla,

$$\frac{\left[g_k(q(x_k-x_{k+1}))\right]^{p_k}}{\left[h_k(q(x_k-x_{k+1}))\right]^{p_k}}\leq K^{p_k}\leq K^M$$

veya

$$\left[g_k(q(x_k-x_{k+1}))\right]^{p_k}\leq K^M\left[h_k(q(x_k-x_{k+1}))\right]^{p_k}$$

olur ki, buradan da $k^{-s}>0$ olduğundan,

$$k^{-s}\left[g_k(q(x_k-x_{k+1}))\right]^{p_k}\leq K^M k^{-s}\left[h_k(q(x_k-x_{k+1}))\right]^{p_k}$$

elde edilir. Yine burada k=1 den ∞'a kadar toplam alınırsa sonuç elde edilir.

vi) $s_1\leq s_2$ olsun. $\forall k$ için $0<k^{-1}\leq 1$ olduğundan, $\forall k\ i\c{c}in\ k^{-s_2}<k^{-s_1}$ olur. Böylece $\forall k$ için,

$$k^{-s_2}\left[f_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}\leq k^{-s_1}\left[f_k\left(q(x_k-x_{k+1})\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan da k=1 den ∞'a kadar toplam alınırsa sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3. $F=(f_k)$ modulus fonksiyon dizisi olmak üzere, $s>1$ ve (M1), (M2) şartları sağlanmış olsun. Bu durumda,

i) $B_g(p,q,s)\subseteq B_g(p,F,q,s)$ olur.

ii) $q_1\equiv q_2\ ise\ B_g(p,F,q_1,s)\equiv B_g(p,F,q_2,s)$,

iii) $B_g(p,F,q)\subseteq B_g(p,F,q,s)$,

vi) $B_g(F,q)\subseteq B_g(F,q,s)$.

İspat: i) Teorem 3.3 (i) de $g_k(t)=t$ alınırsa,

$$s>1\ iken\ B_g(p,q,s)\subseteq B_g(p,F,q,s)$$

olduğu görülür.

ii) $q_1\equiv q_2\ ise\ \forall u\in X\ i\c{c}in\ T_1\leq q_1(u)/q_2(u)\leq T_2$ olacak şekilde $T_1\ ve\ T_2$ pozitif sayılar vardır. Buradan da Teorem 3.3 (iv) den sonuç elde edilir.

iii) Teorem 3.3 (vi) de $s_1=0,\ s_2=s$ alınırsa,

$$B_g(p,F,q)\subseteq B_g(p,F,q,s)$$

olduğu görülür.

v) Teorem 3.3 (vi) de $s_1 = 0,\ s_2 = s$ ve $\forall k\ için\ p_k = k$ alınrsa,

$$B_g(F,q) \subseteq B_g(F,q,s)$$

elde edilir.

Teorem 3.4. $t = t_k\ ve\ r = r_k$ sınırlı diziler ve her bir k için $0 < t_k \le r_k$ olsun. Bu durumda
$B_g(t,F,q) \subseteq B_g(r,F,q)$
olur.

İspat: $x \in B_g(t,F,q)$ olsun. Herbir 0<ε<1 için bazı k_o lar vardır öyle ki, herbir $k > k_o$ için,

$$\left[f_k\left(q\left(x_k - x_{k+1}\right)\right)\right]^{t_k} < \varepsilon < 1$$

olur. Her bir k için $t_k \le r_k$ ve $k > k_o$ için,

$$\left[f_k\left(q\left(x_k - x_{k+1}\right)\right)\right]^{r_k} \le \left[f_k\left(q\left(x_k - x_{k+1}\right)\right)\right]^{t_k}$$

olur ki buradan da $x \in B_g(r,F,q)$ olduğu görülür.

Sonuç 3.4. i) Her bir k için $0 < p_k \le 1$ ise bu durumda,

$$B_g(p,F,q) \subseteq B_g(F,q)$$

ii) Her bir k için $p_k \ge 1$ ise bu durumda,

$$B_g(F,q) \subseteq B_g(p,F,q)$$

İspat: i) Teorem 3.4 de her bir k için $p_k = t_k\ ve\ r_k = 1$ alınırsa sonuç elde edilir.
ii) Teorem 3.4 de her bir k için $p_k = r_k\ ve\ t_k = 1$ alınırsa sonuç elde edilir.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada $B_g(p,f,q,s)$ uzayının genelleştirmesi olan $B_g(p,F,q,s)$ uzayı incelendi. Daha önce tanımlanan uzayların çoğu özelliklerinin benzer şekilde yeni uzaylarda da geçerli olduğu (bazı durumlarda uzayların genelleştirilmesinde kullandığımız modulus fonksiyon dizilerine ek şartlar koyuldu) görüldü. Biz çalışmamızda modulus fonksiyon yardımıyla tanımlanan ve daha önce modulus fonksiyon dizisi yardımıyla genelleştirilmemiş $B_g(p,f,q,s)$ uzayını ele aldık, benzer durumdaki diğer uzaylarda da benzer durumların geçerli olduğu gösterilebilir.

Kaynaklar

Akbayır, K., 2003. Modulus fonksiyon dizileri yardımıyla tanımlanmış bazı dizi uzayları, Doktora Tezi, *Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü.* Van.

Banerji, P.K.; Galiz, A.S., 2000. Weighted composition operators on the modulus function space. *J.Indian Math.Soc.* **67**(1-4): 53-58.

Bhardwaj, V. K., Bala, I., 2009. The sequence space F(Xk, f, p, s) on seminormed spaces, *Tamkang J. Math.* **40**: 247–256

Bilgin, T., 1994. The sequence space `(p, f, q, s) on seminormed spaces. *Bull. Calcutta Math. Soc.* **86**: 295–304.

Bilgin, T., 1996. On strong A-summability defined by a modulus, *Chinese J. Math.* **24** 159–166.

Bilgin, T.,2004., Lacunary strong A-convergence with respect to a sequence of modulus functions, *Appl. Math. Comput.* **151**: 595–600.

Bilgin, T, Altun, Y., 2007, Strongly (V λ , A, p)-summable sequence spaces defined by a modulus, *Math. Model. and Anal.* **12**: 419–424.

Connor, J., 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, *Canad. Math. Bull.* **32** (2):194-198.

Esi, A.; Et, M., 1996. Some new sequence spaces defined by a modulus function. *Pure Appl. Math.Sci.* **43**(1-2): 95-99.

Esi, A., 2000. Some new sequence spaces defined by a modulus function. *İstanbul Üniv. Fen Fak.Mat.Derg.* **55**/56: 17-21.

Gupta, j.S.; Bhola, D.K. 1975. Maximum modulus function of entire functions defined by Dirichlet series. *İstanbul Tek. Üniv. Bül.* **28**(1): 32-38.

Işik, M., 2011. Strongly almost (w, λ, q)-summable sequences, *Math. Slovaca*. **61**:779–788

Karakaya, V., Şimşek N., 2004. On lacunary invariant seuqence spaces defined by a sequence of modulus functions, *Appl. Math. Comput.* **156**: 597–603.

Kolk, E., 1990. Sequence spaces defined by a sequence of modulus. *Abstracts of Conference Problems of pure and applied mathematics. Tartu.* 131-134.

Kolk, E., 1997. F-seminormed sequence spaces defined by a sequence of modulus functions and strongly summability, *Indian J. Pure Appl.Math.* **28**: 1547-1566.

Kolk, E., 1998. Inclusion relations between the statitiscal convergence and strong summability, *Acta Et Commentationes Univ. Tartuensis de Mathematica*. **2**: 39-54.

Kolk, E., 1999. Counterexamples concerning topologization of spaces of strongly almost convergent sequence, *Acta et Commentations Universitatis Tartuensis de Mathematica.* **3**: 63-72

Kolk, E., 2013. On generalized sequence spaces defined by modulus functions, *Acta Et Commentationes Univ. Tartuensis de Mathematica.* **Vol 17**,No 2:179 -205.

Maddox, I. J., 1986. Sequence spaces defined by a modulus, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **100**:161-166.

Nakano, H., 1953. Concave modulars. *J. Math. Soc.* **5**:29-49.

Pehlivan, S.; Fisher, B., 1995. Lacunary strong convergence with respect to a sequence of modulus functions, *Comment. Math. Univ. Carolinae*. **36**(1):69-76.

Raj, K., Sharma, S. K., 2011. Difference sequence spaces defined by a sequence of modulus functions, *Proyecciones.* **30**: 189–199.

Soomer, V., 2000. On r-convex sequence spaces defined by a modulus functions, *Acta Comment. Univ.Tartu. Math.* **(4)**: 17-22.

Şahiner, A., 2002. Some new paranormed Spaces defined by modulus function, *Indian J. Pure Appl. Math.* **33**(2): 1877-1888.