

FİBER KOMPOZİT ÇOK KATLI TÜPSEL SİLİNDİRLERİN BURULMA EKSENEL BASKI YÜKÜ VE DIŞ BASINÇ YÜKLEMELERİ ALTINDA BURKULMA DENKLEMLERİNİN ÇIKARILIŞLARI

Ezgi GÜNAY ve Cihan SİVRİ*

Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Maltepe, 06570, Ankara
*Esenler sok. 34/7, Abidinpaşa, Ankara.

egunay@gazi.edu.tr, cihansivri@superonline.com

(Geliş/Received: 03.03.2005; Kabul/Accepted: 30.01.2006)

ÖZET

Bu çalışmada, çok katlı fiber kompozit silindirlerin denge denklemleri aynı anda etkiyen burulma, eksenel yük ve dış basınç yüklemeleri altında burkulma analizi için incelenmiştir. Denge denklemleri, Klasik ve Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorilerine göre olmak üzere her ikisi içinde, iki grup çıkarımlarda matris formunda elde edilmişlerdir. Bu denklemlerin her birinde, başlangıç gerilme yüklemelerinin etkisi dikkate alınmıştır. Bütün bu ifadeler, üç değişik yüklemenin aynı anda etkilediği fiber kompozit silindirin denge denklemleridir. Daha önce tanımlanmış olan iki ana teoriye göre çözümleme yapabilmek için, yerdeğiştirmeler cinsinden elde edilen denge denklemleri ilgili yaklaşık seri açılımları ile birlikte kullanılarak tanımlanmışlardır. Elde edilen ifadeler, özdeğer probleminin sıkıştırılmış matris formunu veren şekliyle görülmüşlerdir.

Anahtar Kelimeler: Burkulma, ortotropik, fiber kompozit, denge denklemleri, özdeğer-problemi, silindir.

DERIVATIONS OF BUCKLING EQUATIONS FOR THE MULTILAYERED FIBER COMPOSITE TUBULAR CYLINDERS UNDER TORSION AXIAL COMPRESSIVE LOAD AND EXTERNAL PRESSURE

ABSTRACT

In this study, equilibrium equations of multi-layered fiber composite cylinders under combined torsion, axial force and external pressure were examined for buckling analysis. Equations of equilibrium were obtained for both Classical and First Order Shear Deformation Theories in the two groups of derivations as matrix equation. In each of these equations, initial stress loading was included. All of these expressions are the equilibrium equations of fiber composite cylinder in which the three different type of loadings are acting simultaneously. In order to obtain the solutions corresponding to the previously described two main theories, displacement based equilibrium equations have been used by defining them with the related approximated series expansions. Equations appeared to be seen in the compressed matrix form of an eigenvalue problem.

Keywords: Buckling, orthotropic, fiber composite, equilibrium equations, eigenvalue-problem, cylinder.

1. GİRİŞ

Kompozit malzemelerden yapılmış silindirik yapıların değişik yüklemeler altındaki davranışlarının analizini içermekte olan mühendislik problemleri literatürde oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Dong ve Etitum[1-2] son yıllardaki çalışmalarını kapsayan ve fiber kompozit silindirlerin burkulma probleminin analitik ve sayısal çözümlerinin verildiği çalışmaları, değişik yüklemeler altındaki burkulma

analizini ve sonuçlarını kısaca açıklamaktadır. Dong ve Etitum[1], genel yükleme durumu(dış basınç, eksenel basma ve burulma) için elde ettikleri analitik ifadeleri kullanarak ayrı ayrı burulma ve eksenel basma altındaki fiber kompozit silindirik tüp çubuklara ait sayısal sonuçları vererek açıklamışlardır. Aynı yazarlara ait, konuyla ilgili diğer çalışmalar[3-8] literatür içinde ayrıca verilmektedir. Günümüzde, silindirik kabukların burkulma probleminin ait oldukça çok çalışma bulunmaktadır. Yapılan çalışmalardan

bazıları Tennyson [9], Lou ve Yaniv [10], Rezaeepazhand ve Simites [11], Lee, Hwang, Park ve Han [12], Lee, Hwang, Park ve Han [13], Chun ve Dong [14], Kim ve Voyiadjis [15], Frostig ve Simites [16], Han vd. [17], Paimushin ve arkadaşları [18], Combescure ve Gusic [19], Piening vd.[20], Spagnoli vd. [21], Chryssanthopoulos ve arkadaşları [22] ve Bisagni [23]'ye aittir. Bu çalışmada, Dong ve Etitum'un [1-2] burkulma probleminin analitik formülasyonu ve çözümü için gerekli olan denge denklemlerinin özdeğer problemi olarak tanımlanarak çıkarılma aşamaları detaylarıyla açıklanmaktadır [24]. Bu çıkarımların yanında, Klasik Plak/Kabuk teorisinde γ_{xr} ve $\gamma_{x\theta}$ birim kayma deformasyonlarının, Q_{xr} ve $Q_{x\theta}$ kesme net kuvvetleriyle birlikte sıfır alınması durumu da incelenerek ayrıca verilmektedir.

2. KOMPOZİT SİLİNDİRLERİN KABUK TEORİLERİNE GÖRE BURKULMA FORMÜLASYONLARI

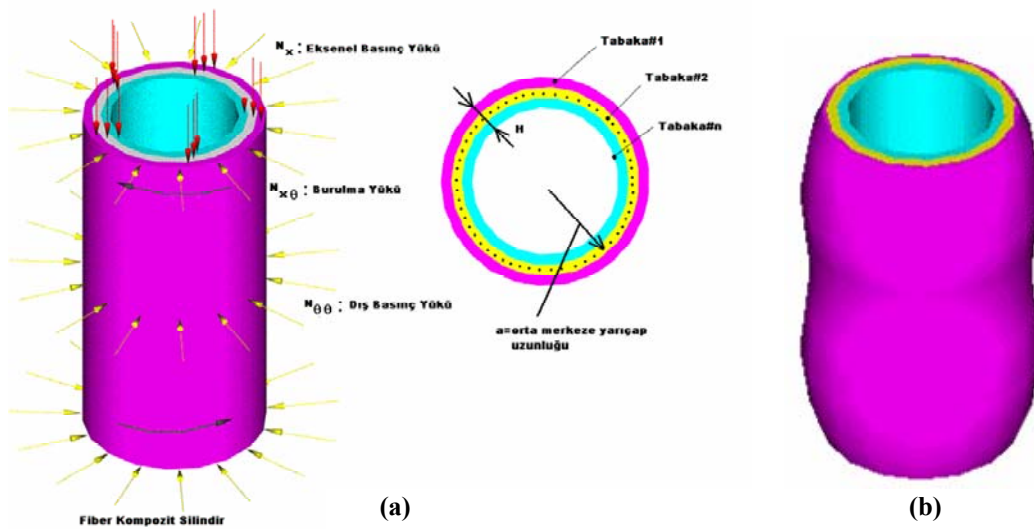
2.1. Dış Basınç Eksenel Basma ve Burulma Yüklemeleri Altında Kompozit Tüplerin Matris Formunda Denge Denklemleri

Bu çalışma, Dong ve Etitum'un, [1] numaralı kaynakçada vermekte oldukları fiber kompozit silindirlerin değişik yüklemeler altında burkulma davranışlarının incelenmesiyle elde edilen denge denklemlerinin, birim deformasyon dağılımları cinsinden matris formunda çıkarımlarının elde edilmiş aşamalarını vermektedir. Aşağıda açıklayacağımız çalışma basamaklarından da görüleceği üzere, yüzeysel dış basınç ve eksenel basma ile burulma yüklemeleri altındaki fiber kompozit silindirin tüp şeklinde olduğu dikkate alınarak (Şekil 1) cidar kalınlığının ince veya kalın olması

na göre, iki plak/kabuk teorisinin kabülleri ayrı ayrı kullanılmıştır. Bunlar Klasik Plak Teorisi (KPT) ve Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisidir (BMKDT). Dong ve Etitum'un [1] çalışmalarında, tüp kalınlığı H ve silindirin orta merkez ekseninden tüp kalınlığının orta koordinat eğrisine kadar olan uzunluk a ile gösterilerek, ince ve kalın kabuklu silindirik yapılar $H/a = 0.01$ ve $H/a = 0.1$ oranlarına göre tanımlanmışlardır.

Klasik plak/kabuk Teorisinin (KT) en önemli kabülleri sırasıyla, yanal normalerin deformasyondan önce ve sonra yine yanal yüzeylere dik kalması ve uzamaması olarak açıklanabilir. Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisinde (BMKDT) ise, yanal yüzlerdeki normaller, deformasyondan sonra ek bir açı ile eğilirler. Bu eğilmenin büyüklüğü, yanal yüzeylerde oluşan kayma gerilmelerinin oluşturdukları γ_{xr} ve $\gamma_{x\theta}$ birim kayma deformasyonlarının büyüklüğü ile orantılı olması durumuyla açıklanmaktadır [25].

Yukarıda belirtilen çalışma basamaklarında görüldüğü gibi, kalın kabuklu silindirlerde birim yüzeylere etkileyen net yanal kayma kuvvetleri olan Q_{xr} ve $Q_{x\theta}$ 'nin dikkate alınmasıyla, BMKD teorisine göre sıfır olmayan birim kaymalar, γ_{xr} ve $\gamma_{x\theta}$ denge denklemlerinde görülmeye devam edecektir. KT'ye göre elde edilmiş olan yeni formdaki yerdeğişimler cinsinden denge denklemlerinde, γ_{xr} ve $\gamma_{x\theta}$ birim kayma deformasyonları sıfır kabul edilerek işleme konsalar bile, silindirin birim kenar uzunluğu üzerinde oluşacak olan net kesme kuvvet değerleri Q_{xr} ve $Q_{x\theta}$ sıfır olmayan çok küçük değerleri ile birlikte kullanılmaktadırlar [25]. Böylece, plak/kabukların deformasyonları sırasında elde edilecek olan toplam potansiyel enerji



Şekil 1. a. Yüzeysel basınç, eksenel basma yükü ve aynı zamanda burulma yüklemeleri altındaki silindirik tüp ve çok katlı fiber kompozit silindirik tüpün yanal kesitinin üstten görünüşü b. Simetrik olarak deforme olması beklenen yaklaşık şekli

ifadelerinde, bu kuvvetlerin olmamasından kaynaklanan toplam potansiyel enerjideki değer kayıplarının giderileceği düşünülerek çözüm elde edilmeye çalışılmaktadır. Fakat bununla beraber, yerdeğiştirme tabanlı olarak sonlu elemanlar yöntemiyle çözümlenmeler yapıldığı takdirde yanal kaymalara karşılık gelen bu ek deformasyonlar ifade edilememektedirler.

Bu çalışmada, KT'ye ait denge denklemlerinde görülmekte olan $Q_{x\theta}$ ve Q_{x0} yanal kesme kuvvetlerinin sıfır alınması ile sıkıştırılmış formdaki ifadeler de çıkarılarak incelenmiştir.

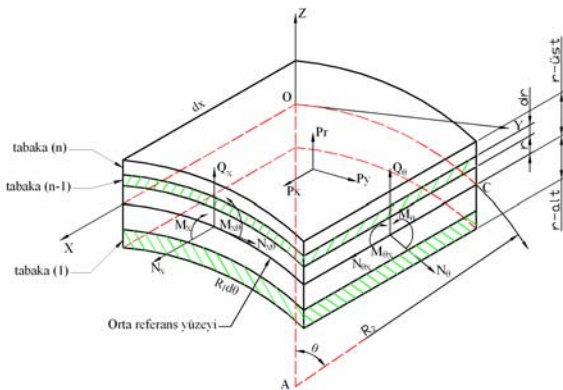
Silindirin burkulma problemine ait başlangıç gerilme dağılımlarının da dikkate alındığı ve deformasyona uğramış silindirik kabuk elemana (Şekil 2) ait genel denge denklem ifadeleri, aşağıdaki gibidir [26,27].

$$aN_{x,x} + N_{\theta x,0} - p(u_{,\theta\theta} - aw_{,x}) - aPu_{,xx} - 2Tu_{,x0} = 0 \quad (1a)$$

$$aN_{\theta,0} + a^2N_{x0,x} + M_{\theta,0} + aM_{x0,x} - pa(v_{,\theta\theta} + w_{,0}) - a^2Pv_{,xx} - 2aT(v_{,x0} + w_{,x}) = 0 \quad (1b)$$

$$M_{\theta,00} + a(M_{x0} + M_{\theta x})_{,x0} + a^2M_{x,xx} - aN_{\theta} - pa(au_{,x} - v_{,\theta} + w_{,\theta\theta}) - a^2Pw_{,xx} + 2aT(v_{,x} - w_{,x0}) = 0 \quad (1c)$$

Flügge teorisine göre, kabuk eleman üzerinde seçilen koordinat sistemindeki pozitif yönler, Dong ve Etitum'un [1-2] ve bu çalışmada kullanılan pozitif sistemin ters yönünde seçilerek kullanılmıştır. İfadelerde, Denklem(1-a,b,c) de başlangıç yüklemelerinin sırasıyla dış basınç, eksenel basınç yükü ve burulma momenti olarak $\bar{N}_{\theta\theta} = -pa$, $a\bar{N}_{xx} = -aP$, $\bar{N}_{x\theta} = T$ eşitlikleri dikkate alınmıştır. Kayma deformasyonu içeren silindirik kabuklar için denge denklemleri;



Şekil 2. Silindirik çok katlı fiber kompozit kabuk eleman ve dış yüklemeler altında kesit yüzeylerde oluşan gerilme dağılımları

$$aN_{x,x} + N_{x0,0} - a\bar{N}_{xx}u_{,xx} - 2\bar{N}_{x\theta}u_{,x0} - \bar{N}_{\theta\theta}\left(\frac{1}{a}u_{,\theta\theta} + w_{,x}\right) = 0 \quad (2)$$

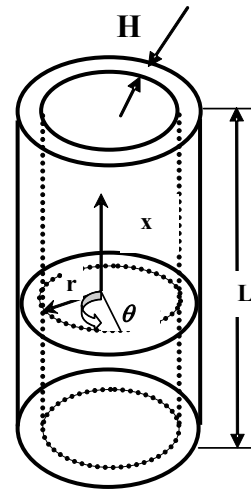
$$aN_{x0,x} + N_{\theta0,0} + Q_{\theta} - a\bar{N}_{xx}v_{,xx} - 2\bar{N}_{x\theta}(v_{,x0} - w_{,x}) - \frac{1}{a}\bar{N}_{\theta\theta}(v_{,\theta\theta} - w_{,0}) = 0 \quad (3)$$

$$aQ_{x,x} + Q_{\theta,0} - N_{\theta\theta} + a\bar{N}_{xx}w_{,xx} + 2\bar{N}_{x\theta}(v_{,x} + w_{,x0}) - \bar{N}_{\theta\theta}\left(u_{,x} - \frac{1}{a}v_{,\theta} - \frac{1}{a}w_{,\theta\theta}\right) = 0 \quad (4)$$

$$aM_{xx,x} + M_{x0,0} - aQ_x = 0 \quad (5)$$

$$aM_{x0,x} + M_{\theta0,0} - aQ_{\theta} = 0 \quad (6)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem(5) ve (6) dan görüleceği üzere, $Q_x (= Q_{x\theta})$ ve $Q_{\theta} (= Q_{x0})$ yanal kesme kuvvetlerinin sıfır alınması ile, moment ifadelerinin x eksenine ve θ doğrultularında oluşacak değişimleri sırasıyla $M_{xx,x} = -(1/a)M_{x0,0}$ ve $M_{x0,x} = -(1/a)M_{\theta0,0}$ ifadelerinde açık olarak görülecektir. Bu nedenle, ara yüzeylerde eğilmeden dolayı oluşacak olan kayma kuvvet değişimleri, kabuk elemanın komşu kenarları boyunca ters yönde eşitlenerek kesme kuvvetlerinin oluşumunu engelleyecektir. Şekil 3'de silindirin koordinat sistemine yerleştirilmiş durumu görülmektedir. Yukarıda verilen denge denklemlerinde yerdeğiştirme fonksiyonları $u = u(x,r,\theta)$, $v = v(x,r,\theta)$ ve $w = w(x,r,\theta)$ x, r ve θ koordinat parametreleri cinsinden tanımlanmaktadır. Ana denklem tanımlamaları silindirik koordinatlara göre (r,θ,x) verilmiştir. Silindirik kabuk teorisi notasyonuna uyması amacıyla x-koordinat değişkeni z eksenine yerine kullanılmıştır. Problemin tanımlanması, üç yerdeğiştirme $u_i(r,\theta,x)$ ayrıca altı gerilme $\sigma_{ij}(r,\theta,x)$ ve gerilme $\epsilon_{ij}(r,\theta,x)$ bileşenlerinden oluşmaktadır.



Şekil 3. Silindir kabuk yapı ve formülasyonda uygulanan (x, r, θ) koordinat sistemi

Bu değişkenler referans alınan denge konumuna göre küçük adımlı deformasyon durumunu açıklamak için tanımlanmışlardır. Değişkenlerin bileşenleri aşağıdaki vektörlerle verilmiştir:

$$\underline{u} = [u_r \ u_\theta \ u_x]^T \quad (7a)$$

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{rr} \ \sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{xx} \ \sigma_{\theta x} \ \sigma_{rx} \ \sigma_{r\theta}]^T \quad (7b)$$

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{rr} \ \varepsilon_{\theta\theta} \ \varepsilon_{xx} \ \gamma_{\theta x} \ \gamma_{rx} \ \gamma_{r\theta}]^T \quad (7c)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{Q}}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{\theta 0} \\ \gamma_{x\theta 0} \end{Bmatrix} - z \underline{\underline{Q}}^{(k)} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_\theta \\ 2\chi_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (7d)$$

$$\tau_{xr} = f_1(r) \varphi(x, \theta) \quad (7e)$$

$$\tau_{\theta r} = f_2(r) \psi(x, \theta)$$

$$\underline{\underline{Q}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Burada, $\underline{\underline{Q}}^{(k)}$, k'nci laminaya ait rijitlik matrisi, $\varphi(x, \theta)$ ve $\psi(x, \theta)$ x, θ koordinatlarına bağlı bilinmeyen fonksiyonlar, $f_1(r)$, $f_2(r)$ kabuk tabakalarının kalınlığı doğrultusunda τ_{xr} ve $\tau_{\theta r}$ teğetsel gerilmelerin değişim kuralını karakterize eden fonksiyonlar, ε_{x0} , $\varepsilon_{\theta 0}$ kabuğun orta düzlemindeki herhangi bir noktasının x ve θ doğrultularında deformasyon bileşenleri, $\varepsilon_{x\theta}$ ise oxy düzleminde kayma deformasyonudur. $\gamma_{\theta x}$, γ_{rx} , $\gamma_{r\theta}$ eğrilik yarıçaplarının değişimidir. $\underline{\underline{Q}}^{(k)}$ azaltılmış rijitlik matrisinin elemanları Ek-II ile verilmektedir.

Love tipi kabuk/plak teorisine göre deformasyon bileşenleri ile yerdeğiştirme bileşenleri arasındaki bağıntı aşağıdaki şekildedir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\mathbf{a}} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} + \mathbf{w} \right), \gamma_{x\theta} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{\mathbf{a}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \right) \quad (9a)$$

$$\kappa_{xx} = \frac{\partial \beta_x}{\partial \mathbf{x}}, \kappa_{\theta\theta} = \frac{1}{\mathbf{a}} \left(\frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \right), \kappa_{x\theta} = \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{1}{\mathbf{a}} \right) \frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} \quad (9b)$$

$$\gamma_{xr} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} + \beta_x, \gamma_{\theta r} = \frac{1}{\mathbf{a}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} - \mathbf{v} \right) + \beta_\theta \quad (9c)$$

Çok katlı kabuklar için iç kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki ifadelerden bulunmaktadır:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dr, N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dr, N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\theta} dr, \\ N_{\theta x} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta x} dr \end{aligned} \quad (10a)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xr} dr, Q_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta r} dr \quad (10b)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x r dr, M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta r dr, M_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\theta} r dr,$$

$$M_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta x} r dr \quad (10c)$$

Burada, $N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}$ iç tanjant kuvvetleri, Q_x, Q_θ kesme kuvvetleri (Ek-II), M_x, M_θ eğilme ve $M_{x\theta}, M_{\theta x}$ burulma momentleridir.(9) bağıntıları (7a)-(7e) ifadelerinde yerine yazılıp, elde edilen ifadeler (10) ifadelerinde yerine konulduğunda integrasyondan sonra, kuvvet ve moment bileşenleri için şu ifadeler elde edilir:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{61} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{62} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Fiber kompozit silindire ait bünye denkleminin sol tarafındaki kuvvet ve moment vektörü $[\underline{N} \ \underline{M}]^T$, kabuk yapının birim uzunluktaki kenarı boyunca uygulanmakta olan net kuvvet ve moment vektör komponentlerini, sağ taraftaki birim deformasyon vektörü ise $[\underline{\varepsilon} \ \underline{\kappa}]^T$ sırasıyla düzlemsel ve eğilmeye karşılık gelen eğrilik yarıçaplarının birim deformasyon komponentlerini içermektedir. Elastisite veya \underline{K}

rijitlik matrisi ise $\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ 3x3 büyüklüğünde olup

üç alt matrisden oluşmaktadır(Denklem(11)). Burada, \underline{A} düzlemsel rijitliği, \underline{B} etkileşimli düzlemsel-düzlem dışı rijitliği, \underline{D} eğilme rijitlik alt matrislerini ifade etmektedir(Ek-II). Tanımlanmakta olan rijitlik matrisi sayesinde çok katlı fiber kompozit tüpün (H)

kalınlığı, $\underline{\underline{Q}}^{(k)}$ azaltılmış rijitlik matrislerinin hesaplanması sırasında belirlenmektedir. Fiber kompozit silindirin eşdeğer elastik sabitler matrisinin komponentlerinin hesaplanması,

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^m \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \underline{\underline{Q}}_{ij}^{(k)}(1, r, r^2) dr \right) \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

denklemleri ile elde edilmektedir. Ek (II-3) içerisinde verilmekte olan integralin sınırı "h" ile belirtilerek, kompozit tüpün cidar kalınlığı üzerinden eşdeğer malzeme sabitleri matrisi elde edilmiştir. İçi boşaltılmış silindir, m tabakalı ve her tabakası değişik kalınlık ve fiber açılı dizilişe sahip olduğundan, toplam tüp kalınlığı olan H değeri "k'nci" alt tabakanın ayrı ayrı kalınlıklarının bu integralde

azaltılmış katılık matris terimleriyle \bar{Q}_{ij} çarpılarak toplanması sonucunda elde edilen (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) genel formülü içerisinde yer almaktadır.

Birim deformasyonlara karşı yerdeğişimi ifadelerinin (9a)-(9c), birim deformasyon vektöründe yerlerine yerleştirilmesi ve \underline{K} rijitlik matrisi ile çarpılmasından sonra, denge denklemlerindeki türevli ifadeler Denklem(2-6) içerisinde yerlerine sırasıyla yerleştirilmişlerdir. BMSDT kabullerine göre Q_x ve Q_θ yanal kesme kuvvetleri, gama Γ_{jk} , $j=4,5$ $k=4,5$ değeri ile elastik malzeme sabitlerine k_{44} , k_{55} ve k_{45} sabit katsayılarla bağlı olarak kayma gerilmeleri düzeltme faktörleri cinsinden verilmiştir[1](Ek-II). Böylece BMSDT için beş denge denklemi (Denklem(13-a,b,c,d,e)), KT için ise üç denge denklemi Denklem(15-a,b,c) elde edilmişlerdir. İki teoriye göre elde edilen bu denge denklemlerini, son olarak sıkıştırılmış formlarda yazabilmek için L_s ve L_c diferansiyel operatörleri kullanılmıştır. Çalışma sırasında kullanılmış olan bütün diferansiyel operatörler Ek-III ve Ek-IV ile verilmektedir.

2.2. Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisine Göre Matris Formundaki Burkulma Denge Denklemleri

İlk olarak BMSDT için aşağıda, çıkarılan denge denklemleri anizotrop malzeme için ve sıkıştırılmış formlarda yukarıda açıklanan basamaklar izlenerek sırasıyla verilmiştir.

$$\begin{aligned}
& A_{11}u_{,xx} + \frac{2A_{16}}{a}u_{,0x} + \frac{A_{66}}{a^2}u_{,00} + A_{16}v_{,xx} \\
& + \frac{A_{12} + A_{66}}{a}v_{,0x} + \frac{A_{26}}{a^2}v_{,00} + \frac{A_{12}}{a}w_{,x} \\
& + \frac{A_{26}}{a^2}w_{,0} + B_{11}\beta_{x,xx} + \frac{B_{16}}{a}\beta_{x,0x} \\
& + \frac{B_{16}}{a}\beta_{x,x0} + \frac{B_{66}}{a^2}\beta_{x,00} + B_{16}\beta_{0,xx} \\
& + \frac{B_{12}}{a}\beta_{0,0x} + \frac{B_{66}}{a}\beta_{0,x0} + \frac{B_{26}}{a^2}\beta_{0,00} \\
& = \bar{N}_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{N}_{x0} \frac{2}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \bar{N}_{00} \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& = \left\{ \bar{N}_{xx} [L_{sg1}] + \bar{N}_{x0} [L_{sg2}] \right. \\
& \quad \left. + \bar{N}_{00} ([L_{sg3-11}] + [L_{sg3-13}]) \right\} \{u_s\}
\end{aligned} \tag{12a}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16}u_{,xx} + \frac{A_{66} + A_{12}}{a}u_{,0x} + \frac{A_{26}}{a^2}u_{,00} + A_{66}v_{,xx} \\
& + \frac{2A_{26}}{a}v_{,0x} + \frac{A_{22}}{a^2}v_{,00} - \frac{\Gamma_{44}}{a^2}v + A_{26} \frac{1}{a}w_{,x} \\
& + \Gamma_{45} \frac{1}{a}w_{,x} + \Gamma_{44} \frac{1}{a^2}w_{,0} + A_{22} \frac{1}{a^2}w_{,0} + B_{16}\beta_{x,xx} \\
& + \frac{B_{66} + B_{12}}{a}\beta_{x,0x} + B_{26} \frac{1}{a^2}\beta_{x,00} + \Gamma_{45} \frac{1}{a}\beta_x \\
& + B_{66}\beta_{0,xx} + B_{26} \frac{2}{a}\beta_{0,0x} + B_{22} \frac{1}{a^2}\beta_{0,00} + \Gamma_{44} \frac{1}{a}\beta_\theta \\
& = \bar{N}_{xx} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{N}_{x0} \left(\frac{2}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{2}{a} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& + \bar{N}_{00} \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\
& = \left\{ \bar{N}_{xx} [L_{sg1}] + \bar{N}_{x0} ([L_{sg2-11}] - [L_{sg2-32}]) \right. \\
& \quad \left. + \bar{N}_{00} ([L_{sg3-31}] - [L_{sg3-32}]) \right\} \{u_s\}
\end{aligned} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a} \left(A_{12}u_{,x} + \frac{A_{26}}{a}u_{,0} \right) \\
& + \frac{1}{a} \left[(A_{26} + \Gamma_{45})v_{,x} + \frac{A_{22} + \Gamma_{44}}{a}v_{,0} \right] + \frac{A_{22}}{a^2}w \\
& - \Gamma_{55}w_{,xx} - \frac{2\Gamma_{45}}{a}w_{,x0} - \frac{\Gamma_{44}}{a^2}w_{,00} \\
& + \left(\frac{B_{12}}{a} - \Gamma_{55} \right) \beta_{x,x} + \frac{1}{a} \left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45} \right) \beta_{x,0} \\
& + \left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45} \right) \beta_{0,x} + \frac{1}{a} \left(\frac{B_{22}}{a} - \Gamma_{44} \right) \beta_{0,0} \\
& = \bar{N}_{xx} w_{,xx} + \bar{N}_{x0} \left(\frac{2}{a} v_{,x} + \frac{2}{a} w_{,x0} \right) - \\
& \bar{N}_{00} \left(\frac{1}{a} u_{,x} - \frac{1}{a^2} v_{,0} - \frac{1}{a^2} w_{,00} \right) \\
& = \left\{ \bar{N}_{xx} [L_{sg1}] + \bar{N}_{x0} ([L_{sg2-32}] + [L_{sg2-33}]) \right. \\
& \quad \left. + \bar{N}_{00} ([L_{sg3-31}] - [L_{sg3-32}] - [L_{sg3-33}]) \right\} \{u_s\}
\end{aligned} \tag{12c}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}u_{,xx} + \frac{2B_{16}}{a}u_{,0x} + \frac{B_{66}}{a^2}u_{,00} + B_{16}v_{,xx} \\
& + \frac{B_{12} + B_{66}}{a}v_{,x0} + \frac{B_{26}}{a^2}v_{,00} + \frac{\Gamma_{45}}{a}v + \frac{B_{12}}{a}w_{,x} \\
& - \Gamma_{55}w_{,x} + \frac{B_{26}}{a^2}w_{,0} - \frac{\Gamma_{45}}{a}w_{,0} + D_{11}\beta_{x,xx} \\
& + \frac{2D_{16}}{a}\beta_{x,0x} + \frac{D_{66}}{a^2}\beta_{x,00} - \Gamma_{55}\beta_x + D_{16}\beta_{0,xx} \\
& + \frac{D_{12} + D_{66}}{a}\beta_{0,x0} + \frac{D_{26}}{a^2}\beta_{0,00} \\
& - \Gamma_{45}\beta_\theta = 0
\end{aligned} \tag{12d}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} u_{,xx} + \frac{B_{12} + B_{66}}{a} u_{,x0} + \frac{B_{26}}{a^2} u_{,00} + B_{66} v_{,xx} \\
& + \frac{2B_{26}}{a} v_{,0x} + \frac{B_{22}}{a^2} v_{,00} + \frac{\Gamma_{44}}{a} v + \left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45} \right) w_{,x} \\
& + \frac{1}{a} \left(\frac{B_{22}}{a} - \Gamma_{44} \right) w_{,0} + D_{16} \beta_{x,xx} + \frac{D_{12} + D_{66}}{a} \beta_{x,0x} \\
& + \frac{D_{26}}{a^2} \beta_{x,00} - \Gamma_{45} \beta_x + D_{66} \beta_{0,xx} + \frac{2D_{26}}{a} \beta_{0,0x} \\
& + \frac{D_{22}}{a^2} \beta_{0,00} - \Gamma_{44} \beta_0 = 0
\end{aligned} \tag{12e}$$

$$\begin{aligned}
& (L_{s11}) + (L_{s12}) + (L_{s13}) + (L_{s14}) + (L_{s15}) \\
& = \bar{N}_{xx} [L_{sg1}] + \bar{N}_{x0} [L_{sg2}] + \bar{N}_{00} ([L_{sg3-11}] + [L_{sg3-13}])
\end{aligned} \tag{13a}$$

$$\begin{aligned}
& L_{s21} + L_{s22} + L_{s23} + L_{s24} + L_{s25} \\
& = \bar{N}_{xx} [L_{sg1}] + \bar{N}_{x0} ([L_{sg2-11}] - [L_{sg2-32}]) \\
& + \bar{N}_{00} ([L_{sg3-33}] - [L_{sg3-32}])
\end{aligned} \tag{13b}$$

$$\begin{aligned}
& L_{s31} + L_{s32} + L_{s33} + L_{s34} + L_{s35} \\
& = \bar{N}_{xx} [L_{sg1}] + \bar{N}_{x0} ([L_{sg2-32}] + [L_{sg2-33}]) \\
& + \bar{N}_{00} ([L_{sg3-31}] - [L_{sg3-32}] - [L_{sg3-33}])
\end{aligned} \tag{13c}$$

$$L_{s41} + L_{s42} + L_{s43} + L_{s44} + L_{s45} = 0 \tag{13d}$$

$$L_{s51} + L_{s52} + L_{s53} + L_{s54} + L_{s55} = 0 \tag{13e}$$

Üç farklı dış yükleme altındaki silindirik tüp kabuk elemanın denge denklemleri, yukarıdaki beş ifadede (13-a,b,c,d,e) diferansiyel operatörlerin kullanılmasıyla, sıkıştırılmış matris formunda aşağıdaki Denklem (13f) şeklinde elde edilmiştir:

$$[L_s] \{u_s\} = (\bar{N}_{xx} [L_{sg1}] + \bar{N}_{x0} [L_{sg2}] + \bar{N}_{00} [L_{sg3}]) \{u_s\} \tag{13f}$$

2.3. Klasik Teoriye Göre Matris Formundaki Burkulma Denge Denklemleri

Klasik Teori(KT)'ye ait denge denklemleri ve karşılık gelen sıkıştırılmış formu aşağıda Denklem(14-a,b,c) ve (15-a,b,c,d)'de elde edilerek gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
& A_{11} u_{,xx} + \frac{2A_{16}}{a} u_{,0x} + \frac{A_{66}}{a^2} u_{,00} + \left(A_{16} + \frac{B_{16}}{a} \right) v_{,xx} \\
& + \frac{1}{a} \left[A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12} + B_{66}}{a} \right] v_{,x0} \\
& + \frac{1}{a^2} \left[A_{26} + \frac{B_{26}}{a} \right] v_{,00} + \frac{1}{a} \left[A_{12} w_{,x} + \frac{A_{26}}{a} w_{,0} \right] \\
& - B_{11} w_{,xxx} - \frac{3B_{16}}{a} w_{,xx0} - \left[\frac{B_{12} + 2B_{66}}{a^2} \right] w_{,00x} \\
& - \frac{B_{26}}{a^3} w_{,000} \\
& = \bar{N}_{xx} u_{,xx} + \frac{2}{a} \bar{N}_{x0} u_{,x0} + \bar{N}_{00} \left(\frac{1}{a^2} u_{,00} + \frac{1}{a} w_{,x} \right) \\
& = \left\{ \bar{N}_{xx} L_{cg1} + \bar{N}_{x0} L_{cg2} + \bar{N}_{00} (L_{cg3-11} + L_{cg3-31}) \right\} \{u_c\}
\end{aligned} \tag{14a}$$

$$\begin{aligned}
& \left[A_{16} + \frac{B_{16}}{a} \right] u_{,xx} + \frac{1}{a} \left[A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12} + B_{66}}{a} \right] u_{,0x} \\
& + \frac{1}{a^2} \left[A_{26} + \frac{B_{26}}{a} \right] u_{,00} + \left[A_{66} + \frac{2B_{66}}{a} + \frac{D_{66}}{a^2} \right] v_{,xx} \\
& + \frac{2}{a} \left[A_{26} + \frac{2B_{26}}{a} + \frac{D_{26}}{a^2} \right] v_{,0x} \\
& + \frac{1}{a^2} \left[A_{22} + \frac{2B_{22}}{a} + \frac{D_{22}}{a^2} \right] v_{,00} + \frac{1}{a} \left[A_{26} + \frac{B_{26}}{a} \right] w_{,x} \\
& + \frac{1}{a^2} \left[A_{22} + \frac{B_{22}}{a} \right] w_{,0} - \left[B_{16} + \frac{D_{16}}{a} \right] w_{,xxx} \\
& - \frac{1}{a} \left[B_{12} + 2B_{66} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{a} \right] w_{,xx0} \\
& - \frac{3}{a^2} \left[B_{26} + \frac{D_{26}}{a} \right] w_{,00x} - \frac{1}{a^3} \left[B_{22} + \frac{D_{22}}{a} \right] w_{,000} \\
& = \bar{N}_{xx} v_{,xx} + \frac{2}{a} \bar{N}_{x0} (v_{,x0} - w_{,x}) + \frac{1}{a^2} \bar{N}_{00} (v_{,00} - w_{,0}) \\
& = \left\{ \bar{N}_{xx} L_{cg1} + \bar{N}_{x0} (L_{cg2-11} - L_{cg2-23}) + \bar{N}_{00} (L_{cg3-11} + L_{cg3-23}) \right\} \{u_c\}
\end{aligned} \tag{14b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a} \left[A_{12} u_{,x} + \frac{A_{26}}{a} u_{,0} \right] - B_{11} u_{,xxx} - \frac{3B_{16}}{a} u_{,0xx} \\
& - \frac{B_{12} + 2B_{66}}{a^2} u_{,x00} - \frac{B_{26}}{a^3} u_{,000} + \frac{1}{a} \left[A_{26} + \frac{B_{26}}{a} \right] v_{,x} \\
& + \frac{1}{a^2} \left[A_{22} + \frac{B_{22}}{a} \right] v_{,0} - \left[B_{16} + \frac{D_{16}}{a} \right] v_{,xxx} \\
& - \frac{1}{a} \left[B_{12} + 2B_{66} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{a} \right] v_{,0xx} \\
& - \frac{3}{a^2} \left[B_{26} + \frac{D_{26}}{a} \right] v_{,00x} - \frac{1}{a^3} \left[B_{22} + \frac{D_{22}}{a} \right] v_{,000} \\
& + \frac{A_{22}}{a^2} w - \frac{2}{a} \left[B_{12} w_{,xx} + \frac{2B_{26}}{a} w_{,x0} + \frac{B_{22}}{a^2} w_{,00} \right] \\
& + D_{11} w_{,xxxx} + \frac{4D_{16}}{a} w_{,x0xx} + \frac{2D_{12} + 4D_{66}}{a^2} w_{,00xx} \\
& + \frac{4D_{26}}{a^3} w_{,000x} + \frac{D_{22}}{a^4} w_{,0000} \\
& = \bar{N}_{xx} w_{,xx} + \bar{N}_{x0} \left(\frac{2}{a} w_{,x0} + \frac{2}{a} v_{,x} \right) \\
& - \bar{N}_{00} \left(\frac{1}{a} u_{,x} - \frac{1}{a^2} v_{,0} - \frac{1}{a^2} w_{,00} \right) \\
& = \left\{ \bar{N}_{xx} L_{cg1} + \bar{N}_{x0} (L_{cg2-11} + L_{cg2-23}) - \bar{N}_{00} (L_{cg3-13} - L_{cg3-23} - L_{cg3-33}) \right\} \{u_c\}
\end{aligned} \tag{14c}$$

$$\begin{aligned}
& L_{c11} + L_{c12} + L_{c13} \\
& = \bar{N}_{xx} L_{cg1} + \bar{N}_{x0} L_{cg2} + \bar{N}_{00} (L_{cg3-11} + L_{cg3-31})
\end{aligned} \tag{15a}$$

$$\begin{aligned}
& L_{c21} + L_{c22} + L_{c23} \\
& = \bar{N}_{xx} L_{cg1} + \bar{N}_{x0} (L_{cg2-11} - L_{cg2-23}) \\
& + \bar{N}_{00} (L_{cg3-11} + L_{cg3-23})
\end{aligned} \tag{15b}$$

$$\begin{aligned} & L_{c31} + L_{c32} + L_{c33} \\ & = \bar{N}_{xx} L_{cg1} + \bar{N}_{x\theta} (L_{cg2-11} + L_{cg2-23}) \\ & - \bar{N}_{\theta\theta} (L_{cg3-13} - L_{cg3-23} - L_{cg3-33}) \end{aligned} \quad (15c)$$

Dış basınç, eksenel basma ve burulma yüklemeleri altındaki kompozit silindirik tübün kabuk elemanına ait genel haldeki matris formunda elde edilen denge denklemlerinin sıkıştırılmış ifadesi Denklem (15d) ile aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} [L_c] \{u_c\} & = (\bar{N}_{xx} [L_{cg1}] + \bar{N}_{x\theta} [L_{cg2}] \\ & + \bar{N}_{\theta\theta} [L_{cg3}]) \{u_c\} \end{aligned} \quad (15d)$$

Birleşik yükleme altında, Dong ve Etitum'un [1-2] çalışmalarına ek olarak bu çalışmada (Sivri[9]), Klasik Teori (KT) kabülleri altında γ_{xr} ve $\gamma_{x\theta}$ birim kayma deformasyonlarının, Q_{xr} ve $Q_{x\theta}$ yanal net kuvvetlerle birlikte sıfır alınması durumunda, aşağıdaki ifadeler elde edilerek gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} & A_{11}u_{,xx} + \frac{2A_{16}}{a}u_{,\theta x} + \frac{A_{66}}{a^2}u_{,\theta\theta} + \left(A_{16} + \frac{B_{16}}{a}\right)v_{,xx} \\ & + \frac{1}{a}\left[A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12} + B_{66}}{a}\right]v_{,x\theta} \\ & + \frac{1}{a^2}\left[A_{26} + \frac{B_{26}}{a}\right]v_{,\theta\theta} + \frac{1}{a}\left[A_{12}w_{,x} + \frac{A_{26}}{a}w_{,\theta}\right] \\ & - B_{11}w_{,xxx} - \frac{3B_{16}}{a}w_{,xx\theta} - \frac{B_{12} + 2B_{66}}{a^2}w_{,\theta\theta x} \\ & - \frac{B_{26}}{a^3}w_{,\theta\theta\theta} \\ & = \bar{N}_{xx}u_{,xx} + \frac{2}{a}\bar{N}_{x\theta}u_{,\theta x} + \bar{N}_{\theta\theta}\left(\frac{1}{a^2}u_{,\theta\theta} + \frac{1}{a}w_{,x}\right) \\ & = \left\{\bar{N}_{xx}L_{cg1} + \bar{N}_{x\theta}L_{cg2} \right. \\ & \left. + \bar{N}_{\theta\theta}(L_{cg3-11} + L_{cg3-31})\right\} \{u_c\} \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} & A_{16}u_{,xx} + \frac{A_{12} + A_{66}}{a}u_{,x\theta} + \frac{A_{26}}{a^2}u_{,\theta\theta} \\ & + \left(A_{66} + \frac{B_{66}}{a}\right)v_{,xx} + \frac{2}{a}\left(A_{26} + \frac{B_{26}}{a}\right)v_{,\theta x} \\ & + \frac{1}{a^2}\left(A_{22} + \frac{B_{22}}{a}\right)v_{,\theta\theta} + \frac{1}{a}\left(A_{26}w_{,x} + \frac{A_{22}}{a}w_{,\theta}\right) \\ & - B_{16}w_{,xxx} - \frac{1}{a}(2B_{66} + B_{12})w_{,xx\theta} \\ & - \frac{1}{a^2}(B_{26} + 2B_{26})w_{,\theta\theta x} - \frac{B_{22}}{a^3}w_{,\theta\theta\theta} \\ & = \bar{N}_{xx}v_{,xx} + \frac{2}{a}\bar{N}_{x\theta}(v_{,x\theta} - w_{,x}) + \frac{1}{a^2}\bar{N}_{\theta\theta}(v_{,\theta\theta} - w_{,\theta}) \\ & = \left\{\bar{N}_{xx}L_{cg1} + \bar{N}_{x\theta}(L_{cg2-11} - L_{cg2-23}) \right. \\ & \left. + \bar{N}_{\theta\theta}(L_{cg3-11} + L_{cg3-23})\right\} \{u_c\} \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a}\left(A_{12}u_{,x} + \frac{A_{26}}{a}u_{,\theta}\right) + \frac{1}{a}\left(A_{26} + \frac{B_{26}}{a}\right)v_{,x} \\ & + \frac{1}{a^2}\left(A_{22} + \frac{B_{22}}{a}\right)v_{,\theta} - \frac{B_{12}}{a}w_{,xx} \\ & + \frac{1}{a^2}(A_{22}w - 2B_{26}w_{,x\theta}) - \frac{B_{22}}{a^3}w_{,\theta\theta} \\ & = \bar{N}_{xx}w_{,xx} + \bar{N}_{x\theta}\left(\frac{2}{a}w_{,x\theta} + \frac{2}{a}v_{,x}\right) \\ & - \bar{N}_{\theta\theta}\left(\frac{1}{a}u_{,x} - \frac{1}{a^2}v_{,\theta} - \frac{1}{a^2}w_{,\theta\theta}\right) \\ & = \left\{\bar{N}_{xx}L_{cg1} + \bar{N}_{x\theta}(L_{cg2-11} + L_{cg2-23}) \right. \\ & \left. - \bar{N}_{\theta\theta}(L_{cg3-13} - L_{cg3-23} - L_{cg3-33})\right\} \{u_c\} \end{aligned} \quad (16c)$$

$$\begin{aligned} & L_{c11} + L_{c12} + L_{c13} \\ & = \bar{N}_{xx}L_{cg1} + \bar{N}_{x\theta}L_{cg2} + \bar{N}_{\theta\theta}(L_{cg3-11} + L_{cg3-31}) \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} & L_{c24} + L_{c25} + L_{c26} \\ & = \bar{N}_{xx}L_{cg1} + \bar{N}_{x\theta}(L_{cg2-11} - L_{cg2-23}) \\ & + \bar{N}_{\theta\theta}(L_{cg3-11} + L_{cg3-23}) \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} & L_{c34} + L_{c35} + L_{c36} \\ & = \bar{N}_{xx}L_{cg1} + \bar{N}_{x\theta}(L_{cg2-11} + L_{cg2-23}) \\ & - \bar{N}_{\theta\theta}(L_{cg3-13} - L_{cg3-23} - L_{cg3-33}) \end{aligned} \quad (17c)$$

Böylece Denklem (17-a,b,c) KT için basitleştirilmiş yüklemeye karşılık gelen üç ifadedir. Bu üç denklem, yukarıda Denklem (15d) ile verilen sıkıştırılmış matris formülasyonunun özel bir formudur.

3. BURKULMA ANALİZİ İÇİN ÖZDEĞER PROBLEM TANIMLAMALARI

Eksenel basınç ve burulma yüklemeleri altındaki kompozit ve içi boşaltılmış çubuğa ait burkulma mod şekilleri, denge denklemlerinin $\Delta F(\theta, x) = \underline{K} \underline{U}(\theta, x)$ formunda, kritik gerilmenin başlangıç gerilme (bg) değerine bölünme oranını tanımlamakta olan, gama Λ değeri cinsinden ifadesi ile verilmektedir [1,2].

$$\Lambda = \sigma_{\text{kritik: bg}} / \sigma_{\text{bg}} \quad (18)$$

Burkulma mod şekillerini temsilen, KT için $u = u(x, r, \theta)$, $v = v(x, r, \theta)$ ve $w = w(x, r, \theta)$ düzlemsel yerdeğiştirme periodik fonksiyonları, BMSDT için ise sırasıyla $u = u(x, r, \theta)$, $v = v(x, r, \theta)$, $w = w(x, r, \theta)$ düzlemsel ve $\beta_x(x, r, \theta)$, $\beta_\theta(x, r, \theta)$ x ve θ -yönlü dönmelere karşılık gelen açısız dönme periodik fonksiyonları kullanılmaktadır. Seçilen bu periodik fonksiyonlar, karmaşık sayılar düzlemi içerisinde tanımlanan $\underline{U}(\theta, x) = \underline{U}_0 \exp\{i(kx + n\theta)\}$ formundaki seri açılımlardır. Burada \underline{U}_0 , silindirin kalınlığı boyunca belirlenen noktalarda ifade edilen

yerdeğişimi vektörüdür. k ve n silindirin L -eksenel ve θ -çevrimsel yönlerinde oluşacak olan dalga boylarının numaraları olup, $k = n\pi/L$ eşitliği ile beraber kullanılmaktadırlar. $n = 1$ değeri kritik burkulma gerilmelerine karşılık gelmektedir. Denklemlerde görülmekte olan $\underline{\underline{K}}$, rijitlik matrisi olup simetri özelliği vardır. Ayrıca $\underline{\underline{K}}^* = \overline{\underline{\underline{K}}}^T$ şeklinde tanımlanan ($\overline{\underline{\underline{K}}}$: karmaşık konjugate matris) ve $\underline{\underline{K}}^* = \underline{\underline{K}}$ eşitliğinin sağlandığı durumlarda, $\underline{\underline{K}}$ simetrik matrisinden elde edilecek olan özdeğerler reel sayı olarak bulunacaktır. Bu nedenlerle yukarıda verilen seri açılımlar karmaşık sayılardan oluşturulmaktadır [11].

Çubuk yüklendikten sonra çubukta oluşacak burkulma mod şekilleri ve aynı zamanda sınır şartlarının, tekrarlanan veya diğer bir ifadeyle periodik fonksiyonlar cinsinden x -eksenel ve θ -çevrimsel yönlerindeki ifadeleri literatürde görülmektedir [1,2]. Bu aşamada KT ve BMSDT'ye göre kabul edilen yerdeğişimi fonksiyonları aşağıda Denklem (19) ifadesi ile açıklanmaktadır:

$$\begin{aligned} \{u_c\} &= \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} e^{i(kx+n\theta)} \\ \{u_c\} &= \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ B_x \\ B_\theta \end{bmatrix} e^{i(kx+n\theta)} = \{U_{so}\} e^{i(kx+n\theta)} \end{aligned} \quad (19)$$

3.1. İçi Boşaltılmış Silindirik Çubukların Burkulma Probleminin Analizinde Klasik Teoriye Göre Özdeğer Probleminin Tanımlanması

Klasik Teori (KT) ve Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon (BMKDT) teorilerine göre yukarıdaki bölümlerde açıklanan matris formunda sıkıştırılmış denge denklemlerini kullanarak, çok katlı fiber kompozit çubukların burkulma probleminin çözümünü verecek olan özdeğer problemi tanımlamaları yapılabilmektedir [27-29]. Bu nedenle Denklem (19) ile her iki teori için verilmekte olan yaklaşık seri çözümler KT için sırasıyla Denklem (15a), Denklem (15b) ve Denklem (15c)'de ve daha sonra BMKDT için ise Denklem (13-a,b,c,d,e) içerisinde yerdeğişim vektör komponentleri olarak türevleriyle yerlerine konurlar [24]. İki teoriye göre ilgili yerdeğişim fonksiyonları cinsinden denge denklemleri ve karşılıklı olarak k_c ve k_s rijitlik matris komponentleri kullanılarak sıkıştırılmış matris formunda yeni ifadeler görülmüştür (Ek-III, Ek-IV). Bu ifadelerin çıkarılışları sırasıyla önce denge denklemleri daha sonra da rijitlik komponentleri ile ifade edilerek aşağıda arka arkaya verilmişlerdir [24]:

Silindirik yapının kenarları boyunca, bir birim uzunluğundaki bir elemana etkiyen kuvvet/moment bileşenleri bünye denkleminin (Denklem (11)) kuvvet/moment komponentleri, fiber kompozit yapıyı tanımlamakta olan $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{D}}$ rijitlik alt matris komponentleri yerine yazılmasıyla ve Denklem (19)'un üç serbestlik mertebesindeki yerdeğişimleri, fonksiyonel olarak türevleri ile uygulandığında aşağıdaki Denklem (20a) bulunur. Daha sonra, Ek-III içerisinde verilmekte olan $[L_{sg1}]$ grubu içerisindeki operatörler kullanılarak Denklem (22b) eşitliği görülür.

$$\begin{aligned} &A_{11}k^2 + 2A_{16}k\bar{n} + A_{66}\bar{n}^2 + A_{16}k^2 \\ &+ (A_{12} + A_{66})k\bar{n} + A_{26}\bar{n}^2 \\ &+ \frac{1}{a} [B_{16}k^2 + (B_{66} + B_{26})k\bar{n} + B_{26}\bar{n}^2] \\ &+ i \left[-\frac{1}{a} (A_{12}k + A_{26}\bar{n}) - B_{11}k^3 - 3B_{16}k^2\bar{n} \right] \\ &\left[- (B_{12} + 2B_{66})k\bar{n}^2 - B_{26}\bar{n}^3 \right] \\ &= \bar{N}_{xx}k^2 + 2\bar{N}_{x\theta}k\bar{n} + \bar{N}_{\theta\theta} \left(\bar{n}^2 - \frac{1}{a}ik \right) \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} k_{cr11} + k_{cr12} + ik_{ci13} &= \bar{N}_{xx}k_{cg1r} + \bar{N}_{x\theta}k_{cg2r} \\ &+ \bar{N}_{\theta\theta} (k_{cg3r-11} - ik_{cg3i-31}) \end{aligned} \quad (20b)$$

Yukarıdaki ifadelerin çıkarımları sırasında, karmaşık sayılar cinsinden yapılan işlemlerde $i^2 = -1$ değeri alınmıştır. n tam sayısı ile silindirin çevrimsel yönündeki dalga boyu numarası belirtilmiştir. Çıkarımlarda, n değeri, silindirin orta ekseninden kabuk kalınlığının ortasına uzanan yarıçap uzunluğu olan a değerine bölünmesiyle elde edilen normalize edilmiş $\bar{n} = n/a$ ifadesi ile kullanılmaktadır. Yukarıda belirtilen işlem basamakları kullanıldığında aşağıdaki Denklem (21-a,b) ve Denklem (22-a,b) elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} &A_{16}k^2 + (A_{12} + A_{66})k\bar{n} + A_{26}\bar{n}^2 \\ &+ \frac{1}{a} (B_{16}k^2 + (B_{12} + B_{66})k\bar{n} + B_{26}\bar{n}^2) \\ &+ A_{66}k^2 + 2A_{26}k\bar{n} + A_{22}\bar{n}^2 \\ &+ \frac{2}{a} (B_{66}k^2 + 2B_{26}k\bar{n} + B_{22}\bar{n}^2) \\ &+ \frac{1}{a^2} (D_{66}k^2 + 2D_{26}k\bar{n} + D_{22}\bar{n}^2) \\ &- \frac{1}{a} (A_{26}ik + A_{22}i\bar{n}) - \frac{1}{a^2} (B_{26}ik + B_{22}i\bar{n}) \\ &- B_{16}k^3i - (B_{12}i + 2B_{66}i)k^2\bar{n} - 3B_{26}ik\bar{n}^2 - B_{22}i\bar{n}^3 \\ &- \frac{1}{a} [D_{16}k^3i + (D_{12}i + 2D_{66}i)k^2\bar{n} + D_{26}ik\bar{n}^2 + D_{22}i\bar{n}^3] \\ &= \bar{N}_{xx}k^2 + \bar{N}_{x\theta} \left(\frac{2kn}{a} + i\frac{2kn}{a} \right) + \bar{N}_{\theta\theta} \left(\bar{n}^2 + i\frac{\bar{n}}{a} \right) \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} & k_{cr21} + k_{cr22} + ik_{ci23} \\ & = \bar{N}_{xx} k_{cg1r-11} + \bar{N}_{x0} (k_{cg2r-23} + ik_{cg2i-23}) \\ & \quad + \bar{N}_{00} (k_{cg3r-11} + ik_{cg3i-23}) \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a} i [A_{12} k + A_{26} \bar{n}] - B_{11} k^3 i - 3B_{16} ik^2 \bar{n} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) ik \bar{n}^2 - B_{26} i \bar{n}^3 - \frac{1}{a} [A_{26} k + A_{22} \bar{n}] i \\ & - \frac{1}{a^2} [B_{26} k + B_{22} \bar{n}] - B_{16} k^3 i - (B_{12} + 2B_{66}) ik^2 \bar{n} \\ & - 3B_{26} ik \bar{n}^2 - B_{22} i \bar{n}^3 \\ & - \frac{1}{a} i [D_{16} k^3 + (D_{12} + 2D_{66}) k^2 \bar{n} + 3D_{26} k \bar{n}^2 + D_{22} \bar{n}^3] \\ & - \frac{A_{22}}{a^2} - \frac{2}{a} [B_{12} k^2 + 2B_{26} k \bar{n} + B_{22} \bar{n}^2] - D_{11} k^4 - 4D_{16} k^3 \bar{n} \\ & - (2D_{12} + 4D_{66}) k^2 \bar{n}^2 - 4D_{26} k \bar{n}^3 - D_{22} \bar{n}^4 \\ & = \bar{N}_{xx} k^2 - \bar{N}_{x0} (-2k \bar{n} + \frac{2}{a} ik) + \bar{N}_{00} \left(\frac{1}{a} ik - \frac{1}{a} i \bar{n} - i^2 \bar{n}^2 \right) \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} & -k_{ci31} - k_{ci32} - k_{cr33} \\ & = \bar{N}_{xx} k_{cg1r-11} + \bar{N}_{x0} (k_{cg2r-11} - ik_{cg2i-23}) \\ & \quad + \bar{N}_{00} (ik_{cg3i-31} - ik_{cg3i-23} + k_{cg3r-11}) \end{aligned} \quad (22b)$$

3.2. İçi Boşaltılmış Silindirik Çubukların Burkulma Probleminin Analizinde Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisine Göre Özdeğer Probleminin Tanımlanması

BMSDT için özdeğer problemini ifade eden beş grup eşitlik Denklem (23b), Denklem (24b), Denklem (25b), Denklem (26b) ve Denklem (27b) ile aşağıda sırasıyla verilmektedir:

$$\begin{aligned} & A_{11} k^2 + 2A_{16} k \bar{n} + A_{66} \bar{n}^2 + A_{16} k^2 + (A_{12} + A_{66}) k \bar{n} \\ & + A_{26} \bar{n}^2 - \frac{A_{12}}{a} ik - \frac{A_{26}}{a} i \bar{n} + B_{11} k^2 + B_{16} k \bar{n} + B_{16} k \bar{n} \\ & + B_{66} \bar{n}^2 + B_{16} k^2 + B_{12} k \bar{n} + B_{66} k \bar{n} + B_{26} \bar{n}^2 \\ & = \bar{N}_{xx} k^2 + \bar{N}_{x0} 2k \bar{n} + \bar{N}_{00} \left(\bar{n}^2 - \frac{1}{a} ik \right) \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} & k_{sr11} + k_{sr12} + k_{si13} + k_{sr14} + k_{sr15} \\ & = \bar{N}_{xx} k_{sg1r-11} + \bar{N}_{x0} k_{sg2r-11} \\ & \quad + \bar{N}_{00} (k_{sg3r-11} - ik_{sg3i-31}) \end{aligned} \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} & A_{16} k^2 + (A_{66} + A_{12}) k \bar{n} + A_{26} \bar{n}^2 + A_{66} k^2 \\ & + 2A_{26} k \bar{n} + A_{22} \bar{n}^2 + \frac{\Gamma_{44}}{a^2} \\ & - \frac{1}{a} [(A_{26} + \Gamma_{45}) ik + (\Gamma_{44} + A_{22}) i \bar{n}] \\ & + B_{16} k^2 + (B_{66} + B_{12}) k \bar{n} \\ & + B_{26} \bar{n}^2 - \Gamma_{45} \frac{1}{a} + B_{66} k^2 + B_{26} 2k \bar{n} + B_{22} \bar{n}^2 - \Gamma_{44} \frac{1}{a} \\ & = \bar{N}_{xx} k^2 + \bar{N}_{x0} \left(2k \bar{n} + \frac{2}{a} ik \right) + \bar{N}_{00} \left(\bar{n}^2 + \frac{1}{a} i \bar{n} \right) \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} & k_{sr21} + k_{sr22} + k_{si23} + k_{sr24} + k_{sr25} \\ & = \bar{N}_{xx} k_{sg1r} + \bar{N}_{x0} (k_{sg2r-11} + ik_{sg2i-23}) \\ & \quad + \bar{N}_{00} (k_{sg3r} + ik_{sg3i-23}) \end{aligned} \quad (24b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} (A_{12} ik + A_{26} i \bar{n}) + \frac{1}{a} [(A_{26} + \Gamma_{45}) ik + (A_{22} + \Gamma_{44}) i \bar{n}] \\ & + \frac{A_{22}}{a^2} + \Gamma_{55} k^2 + 2\Gamma_{45} k \bar{n} + \Gamma_{44} \bar{n}^2 + \left(\frac{B_{12}}{a} - \Gamma_{55} \right) ik \\ & + \left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45} \right) i \bar{n} + \left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45} \right) ik + \left(\frac{B_{22}}{a} - \Gamma_{44} \right) i \bar{n} \\ & = -\bar{N}_{xx} k^2 + \bar{N}_{x0} \left(\frac{2}{a} ik - 2k \bar{n} \right) - \bar{N}_{00} \left(\frac{1}{a} ik - \frac{1}{a} i \bar{n} + \bar{n}^2 \right) \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} & -k_{si31} - k_{si32} - k_{sr33} - k_{si34} - k_{si35} \\ & = \bar{N}_{xx} k_{sg1r} + \bar{N}_{x0} (k_{sg2r-11} - ik_{sg2i-23}) \\ & \quad + \bar{N}_{00} (ik_{sg3i-31} - ik_{sg3i-23} + k_{sg3r}) \end{aligned} \quad (25b)$$

$$\begin{aligned} & B_{11} k^2 + 2B_{16} k \bar{n} + B_{66} \bar{n}^2 + B_{16} k^2 + (B_{12} + B_{66}) k \bar{n} \\ & + B_{26} \bar{n}^2 - \frac{\Gamma_{45}}{a} - i \left(\frac{B_{12}}{a} - \Gamma_{55} \right) k - i \left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45} \right) \bar{n} \\ & + D_{11} k^2 + 2D_{16} k \bar{n} + D_{66} \bar{n}^2 + \Gamma_{55} + D_{16} k^2 \\ & + (D_{12} + D_{66}) k \bar{n} + D_{26} \bar{n}^2 + \Gamma_{45} = 0 \end{aligned} \quad (26a)$$

$$k_{sr41} + k_{sr42} + k_{si43} + k_{sr44} + k_{sr45} = 0 \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} & B_{16} k^2 + (B_{12} + B_{66}) k \bar{n} + B_{26} \bar{n}^2 + B_{66} k^2 + 2B_{26} k \bar{n} \\ & + B_{22} \bar{n}^2 - \frac{\Gamma_{44}}{a} - \left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45} \right) ik - \left(\frac{B_{22}}{a} - \Gamma_{44} \right) i \bar{n} \\ & + D_{16} k^2 + (D_{12} + D_{66}) k \bar{n} + D_{26} \bar{n}^2 + \Gamma_{45} + D_{66} k^2 \\ & + 2D_{26} k \bar{n} + D_{22} \bar{n}^2 + \Gamma_{44} = 0 \end{aligned} \quad (27a)$$

$$k_{sr51} + k_{sr52} - k_{si53} + k_{sr54} + k_{sr55} = 0 \quad (27b)$$

$$[K_c(k, n)] \{U_{co}\} = \Lambda \begin{pmatrix} R_1 [K_{cg1}(k, n)] \\ + R_2 [K_{cg2}(k, n)] \\ + R_3 [K_{cg3}(k, n)] \end{pmatrix} \{U_{co}\} \quad (28)$$

$$[K_s(k, n)] \{U_{so}\} = \Lambda \begin{pmatrix} R_1 [K_{sg1}(k, n)] \\ + R_2 [K_{sg2}(k, n)] \\ + R_3 [K_{sg3}(k, n)] \end{pmatrix} \{U_{so}\} \quad (29)$$

$$[K_c(k, n) - \Lambda K_c^*(k, n)] \{U_{c0}\} = \{0\} \quad (30)$$

$$[K_s(k, n) - \Lambda K_s^*(k, n)] \{U_{s0}\} = \{0\} \quad (31)$$

4. SONUÇLAR

Özdeğer problemi olarak ortaya çıkan matris ifadelerinin çözümleri, bize silindirlerin burkulma davranışını gösterirken taşıdıkları kritik gerilme ve genleme değerlerini de verecektir. Elde edilen katsayı matrislerinin determinantlarının sıfıra eşitlenmesi ile elde edilecek olan kökler veya özdeğerler ve aynı zamanda her özdeğer için elde edilecek yerdeğişimi vektörü,

özvektörleri verecektir. Burkulma problemlerinde çevrimsel yönde ilk mod olan $n=1$ değeri ile en önemli kritik kayma gerilmesi belirlenecektir.

Çalışmamızda, anizotropik fiber kompozit tüp silindirin burulma, eksenel baskı ve dış basınç yüklemeleri altındaki durumu, KT ve BMKDT kabuk teorilerine göre denge denklemleri çıkarılarak incelenmiştir. Elde edilen burkulma problemine ait silindirik kabuk denge denklemlerinden de görüleceği gibi, diğer genel silindirik kabuk formülasyonlarından farklı olarak $N_{x\theta} \neq N_{\theta x}$ ve $M_{x\theta} \neq M_{\theta x}$ eşitsizlikleri görülecektir. Bu farklılık kalın cidarlı silindirik elemanlarda BMKDT ile k_{ij} düzeltme faktörleri sayesinde düzensel kuvvetlerin etkisinin gerilme dağılımlarına eklenmesi ile tanımlanmaktadır. İnce kabuklara ait genel ifadelerde, birbirlerine komşu iki yüzeye ait eğrilik yarıçaplarının farklılığı ($1/R_1 \neq 1/R_2$) dikkate alınmıyorken literatürdeki çalışmaların bazılarında (Calcote[27]) bu farklılık dikkate alındığı görülmektedir. Silindirin geometrik özelliği nedeniyle ise burkulma probleminde, KT ve BMKDT'nin her ikisinde de $1/R_1 = 0$ durumu söz konusudur. Ayrıca elde edilen denge denklemleri, başlangıç yüklemelerinin \bar{N}_{xx} , $\bar{N}_{\theta\theta}$, $\bar{N}_{x\theta}$ etkisi altındaki deforme olmuş şekli [26-28] (Şekil 2) ile tanımlanmışlardır. Sonuç ifadeleri, seri açılımlar yardımıyla sıkıştırılmış formlarda çözüme hazır hale getirilmiştir.

Silindirik kabuk yapıların cidar kalınlıklarının ince ve kalın olmasına göre ortaya çıkacak sonuç farklılıkları, teoriler yardımıyla tanımlandığı için geometrik faktörler göre en uygun olan model çalışmada verilen ilgili denklem grubu seçilerek kullanılmalıdır. Literatürdeki çalışmaların sonuçlarına bakıldığında zaman analitik ve sayısal çözümlerinin, L/a , H/a geometrik faktörlerin oranlarına, ayrıca fiber dizilişlerine bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Çaprazlama dizilmiş konfigürasyonların kullanılması ve a çap uzunluğunun L çubuk uzunluğuna göre küçük olmayan değerlerde alınması durumlarında, analitik çözümün olumsuz olduğu bilinmektedir. Bu nedenlerle, bu çalışmada çıkarılan özdeğer problemi ifadelerinde geometrik ve malzeme özelliklerinin değerleri bu çerçevede dahilinde seçildiği takdirde analitik çözüm elde edilebilecektir. Sonlu elemanlar yöntemiyle modelleme yapıldığı zaman ise sınır şartlarında ve geometrik faktörlerdeki sınırlamalar azalarak, daha kapsamlı sonuçlar elde edilebilecektir. İleriki çalışmalarda, teorik çözümler ile sonlu elemanlar analizine ait sonuç değerleri karşılaştırılmaya çalışılacaktır.

Teşekkür

Yazarlar, çalışmadaki resimlendirme çalışmalarından dolayı G.Ü. Müh. Mim. Fak. Makine Mühendisliği Bölümünden Dr. Yusuf Usta'ya teşekkürlerini sunarlar.

KAYNAKLAR

1. Etitum, P. ve Dong, S.B., "A Comparative Study of Stability of Laminated Anisotropic Cylinders under Axial Compression and Torsion", **Int. J. Solids Structures**, Cilt 32, No (8/9), 1231-1246, 1995.
2. Dong, S.B. ve Etitum, P., "Three Dimensional Stability Analysis of Laminated Anisotropic Circular Cylinders", **Int. J. Solids Structures**, Cilt 32, No (8/9), 1211-1230, 1995.
3. Dong, S.B. ve Chun, C.K., "Shear Constitutive Relations for Laminated Anisotropic Shells and Plates. Part I-Methodology", **J. Appl. Mech.** Cilt 59, No 2, 372-379, 1992.
4. Dong, S.B. ve Etitum, P., "Three Dimensional Stability Analysis of Laminated Anisotropic Cylinders", **Int. J. Solids Structures**, Cilt 31, 262, 1994.
5. Dong, S.B., Pister, K.S. ve Taylor, R.L., "On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates", **J. Aerospace Sci.**, Cilt 29, No 89, 969-975, 1962.
6. Etitum, P., "Stability Analysis of Laminated Composite Cylinders", Ph.D. Dissertation, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Los Angeles, CA., 1993.
7. Dong, S.B. ve Wolf, J.A., "Stability Analysis of Structures by a Reduced System of Generalized Coordinates", **Int. J. Solids Structures**, Cilt 6, 1377-1388, 1970.
8. Dong, S.B., Wolf, J.A ve Peterson, F.E., "On a Direct Iterative Eigensolution Technique", **Int. J. Numer. Meth. Engng.** Cilt 4, 155-162, 1972.
9. Tennyson, R.C., "Buckling of Laminated Composite Cylinders: A Review", **Composites**, 17-24, 1975.
10. Lou, K.A. ve Yaniv, G., "Buckling of Circular Cylindrical Composite Shells under Axial Compression and Bending Loads", **Journal of Composite Materials**, Cilt 25, 162-187, 1991.
11. Rezaeepazhand, J. ve Simites, G.J., "Structural Similitude for Vibration Response of Laminated Cylindrical Shells with Double Curvature", **Composites: Part B**, 28, 195-200, 1997.
12. Lee, C.S., Hwang, W., Park, H.C. ve Han, K.S., "Failure of Carbon/Epoxy Composite Tubes under Combined Axial and Torsional Loading- 1. Experimental Results and Prediction of Biaxial Strength by the Use of Neutral Networks", **Composite Science and Technology**, Cilt 59, 1779-1788, 1999.
13. Lee, C.S., Hwang, W., Park, H.C. ve Han, K.S., "Failure of Carbon/Epoxy Composite Tubes under Combined Axial and Torsional Loading- 2. Fracture Morphology and Failure Mechanism", **Composite Science and Technology**, Cilt 59, 1789-1804, 1999.
14. Chun, C.K. ve Dong, S.B., "Finite Element Analysis of Shear Deformation in Laminated Anisotropic

- Shells of Revolution”, **Journal of Sound and Vibration**, Cilt 218, No 1, 164-176, 1998.
15. Kim, K. ve Voyiadjis, G.Z., “Buckling Strength Prediction of CFRP Cylindrical Panels Using Finite Element Method”, **Composites: Part A**, Cilt 30, 1093-1104, 1999.
 16. Frostig, Y. ve Simitses, G.J., “Similitude of Sandwich Panels with a Soft Core in Buckling”, **Composites: Part B**, Cilt 35, 599-608, 2004.
 17. Han, J.H., Kardomateas, G.A. ve Simitses, G.J., “Elasticity Shell Theory and Finite Element Results for the Buckling of Long Sandwich Cylindrical Shells under External Pressure”, **Composites: Part B**, Cilt 35, 591-598, 2004.
 18. Paimushin, V.N., Ivanov, V.A., Lukankin, S.A., Bushkov, A.A. ve Vyalkov, A.E., “Shear Buckling Modes of Cylindrical Sandwich Shells under External Pressure Tension-Compression of Bearing Layers with Unequal Forces and in Homogeneous Across the Thickness Temperature”, **Mechanics of Composite Materials**, Cilt 41, No 1, 23-32, 2005.
 19. Combescure, A. ve Gusic, G., “Nonlinear Buckling of Cylinders under External Pressure with Nonaxisymmetric Thickness Imperfections Using the COMI Axisymmetric Shell Element”, **Int. J. Solids and Structures**, Cilt 38, 6207-6226, 2001.
 20. Piening, H.R.M., Farshad, M., Geier, B. ve Zimmermann, R., “Buckling Loads of CFRP Composite under Combined Axial and Torsion Loading-Experiments and Computations”, **Composite Structures**, Cilt 23, 427-435, 2001.
 21. Spagnoli, A., Elghazouli, A.Y., ve Chryssanthopoulos, M.K., “Numerical simulation of glass-reinforced plastic cylinders under axial compression”, **Marine Structures**, Cilt 14, 353-374, 2001. Chryssanthopoulos, M.K., Elghazouli, A.Y. ve Esong, I.E., Validation of FE Models for Buckling Analysis of Woven GFRP Shells, **Composite Structures**, Cilt 49, 355-367, 2000.
 22. Bisagni, C., “Numerical Analysis and Experimental Correlation of Composite Shell Buckling and Post-Buckling”, **Composites: Part B**, Cilt 31, 655-667, 2000.
 23. Sivri, C., **Anizotrop Kompozit Silindirlerin Stabilité Analizinde Denge Denklemlerinin Açılımlarının İncelenmesi**, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Şubat, 2005.
 24. Reddy, J. N., **Mechanics of Laminated Composite Plates-Theory and Analysis**, CRC Press, USA, 1996.
 25. Flügge, W., **Stresses in Shells**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
 26. Calcote, L. R., **The Analysis of Laminated Composite Structures**, Van Nostran Reinhold Company, New York, 1969.
 27. Ugural, A.C., **Stresses in Plates and Shells**, McGraw-Hill, Singapore, 1999.

EKLER

Ek-I

$$\bar{Q}_{11} = E_x \cdot \cos^4 \alpha + E_y \cdot \sin^4 \alpha + 2(E_{x'y'} + 2G) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (\text{I-1})$$

$$\bar{Q}_{22} = E_x \cdot \sin^4 \alpha + E_y \cdot \cos^4 \alpha + 2(E_{x'y'} + 2G) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (\text{I-2})$$

$$\bar{Q}_{12} = (E_x + E_y - 4G) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + E_{x'y'} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \quad (\text{I-3})$$

$$\bar{Q}_{33} = (E_x + E_y - 2E_{x'y'} - 2G) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + G (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \quad (\text{I-4})$$

$$\bar{Q}_{13} = (E_x - E_{x'y'} - 2G) \sin \alpha \cos^3 \alpha - (E_y - E_{x'y'} - 2G) \sin^3 \alpha \cos \alpha \quad (\text{I-5})$$

$$\bar{Q}_{23} = (E_x - E_{x'y'} - 2G) \sin^3 \alpha \cos \alpha - (E_y - E_{x'y'} - 2G) \sin \alpha \cos^3 \alpha \quad (\text{I-6})$$

Burada, $E_x, E_y, E_{x'y'}$ malzeme sabitlerinin asal yönlerdeki (x', y') değerlerini belirtmekte olup, α açısı (x, y) referans koordinat ve (x', y') eksenleri arasındaki açıdır.

Ek-II

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{55} & \Gamma_{45} \\ \Gamma_{45} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xr} \\ \gamma_{\theta r} \end{bmatrix} \quad (\text{II-1})$$

$$\Gamma_{55} = k_{55}^2 A_{55}, \quad \Gamma_{44} = k_{44}^2 A_{44}, \quad \Gamma_{45} = k_{45}^2 A_{45}, \quad A_{55}, A_{44}, A_{45} = \int_h (Q_{55}^{(4)}, Q_{44}^{(4)}, Q_{45}^{(4)}) dr \quad (\text{II-2})$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_h Q_{ij}^k(1, r, r^2) dr \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (\text{II-3})$$

Ek-III

$[L_s]$ operatörleri :

$$L_{s11} = A_{11}(\cdot)_{,xx} + \frac{2A_{16}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{A_{66}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta}$$

$$L_{s12} = L_{s21} = A_{16}(\cdot)_{,xx} + \frac{A_{12} + A_{66}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{A_{26}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta}$$

$$L_{s13} = L_{s31} = \frac{1}{a} \left[A_{12}(\cdot)_{,x} + \frac{A_{26}}{a}(\cdot)_{,\theta} \right]$$

$$L_{s14} = L_{s41} = B_{11}(\cdot)_{,xx} + \frac{2B_{16}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{B_{66}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta}$$

$$L_{s15} = L_{s51} = B_{16}(\cdot)_{,xx} + \frac{B_{12} + B_{66}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{B_{26}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta}$$

$$L_{s22} = A_{66}(\cdot)_{,xx} + \frac{2A_{26}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{A_{22}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} - \frac{\Gamma_{44}}{a^2}(\cdot)$$

$$L_{s23} = L_{s32} = \frac{1}{a} \left[(A_{26} + \Gamma_{45})(\cdot)_{,x} + \frac{A_{22} + \Gamma_{44}}{a}(\cdot)_{,\theta} \right]$$

$$L_{s24} = L_{s42} = B_{16}(\cdot)_{,xx} + \frac{B_{12} + B_{66}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{B_{26}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} + \frac{\Gamma_{45}}{a}(\cdot)$$

$$\begin{aligned}
L_{s25} &= L_{s52} = B_{66}(\cdot)_{,xx} + \frac{2B_{26}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{B_{22}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} - \frac{\Gamma_{44}}{a}(\cdot) \\
L_{s33} &= \frac{A_{22}}{a^2}(\cdot) - \Gamma_{55}(\cdot)_{,xx} - \frac{2\Gamma_{45}}{a}(\cdot)_{,x\theta} - \frac{\Gamma_{44}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} \\
L_{s34} &= L_{s43} = \left(\frac{B_{12}}{a} - \Gamma_{55}\right)(\cdot)_{,x} + \frac{1}{a}\left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45}\right)(\cdot)_{,\theta} \\
L_{s35} &= L_{s53} = \left(\frac{B_{26}}{a}(\cdot)_{,x} - \Gamma_{45}(\cdot)_{,x}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{B_{22}}{a} - \Gamma_{44}\right)(\cdot)_{,\theta} \\
L_{s44} &= D_{11}(\cdot)_{,xx} + \frac{2D_{16}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{D_{66}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} - \Gamma_{55}(\cdot) \\
L_{s45} &= L_{s54} = D_{16}(\cdot)_{,xx} + \frac{D_{12} + D_{66}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{D_{26}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} - \Gamma_{45}(\cdot) \\
L_{s55} &= D_{66}(\cdot)_{,xx} + \frac{2D_{26}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{D_{22}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} - \Gamma_{44}(\cdot)
\end{aligned}$$

$[L_{sg1}]$ operatörleri :

$$\begin{aligned}
L_{sg1-11}(\cdot) &= L_{sg1-22}(\cdot) = -L_{sg1-33}(\cdot) = (\cdot)_{,xx} \\
L_{sg2-32}(\cdot) &= -L_{sg2-23}(\cdot) = \frac{2}{a}(\cdot)_{,x\theta} \\
L_{sg2-11}(\cdot) &= L_{sg2-22}(\cdot) = L_{sg2-33}(\cdot) = \frac{2}{a}(\cdot)_{,x\theta} \\
L_{sg3-11}(\cdot) &= L_{sg3-22}(\cdot) = L_{sg3-33}(\cdot) = \frac{1}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} \\
L_{sg3-32}(\cdot) &= -L_{sg3-23}(\cdot) = \frac{1}{a^2}(\cdot)_{,\theta} \\
L_{sg3-13}(\cdot) &= -L_{sg3-31}(\cdot) = \frac{1}{a}(\cdot)_{,x} \\
[k, (k, n)] &= [k_{sr}, (k, n)] + i[k_{si}, (k, n)] \\
k_{sr11} &= A_{11}k^2 + 2A_{16}k\bar{n} + A_{66}\bar{n}^{-2} \\
k_{sr12} &= k_{sr21} = A_{16}k^2 + (A_{12} + A_{66})k\bar{n} + A_{26}\bar{n}^{-2} \\
k_{sr14} &= k_{sr14} = B_{11}k^2 + B_{16}k\bar{n} + B_{16}k\bar{n} + B_{66}\bar{n}^{-2} \\
k_{sr15} &= k_{sr51} = B_{16}k^2 + B_{12}k\bar{n} + B_{66}k\bar{n} + B_{26}\bar{n}^{-2} \\
k_{sr22} &= A_{66}k^2 + 2A_{26}k\bar{n} + A_{22}\bar{n}^{-2} + \frac{\Gamma_{44}}{a^2} \\
k_{si23} &= -\frac{1}{a}\left[(A_{26} + \Gamma_{45})k + (\Gamma_{44} + A_{22})\bar{n}\right] \\
k_{sr24} &= k_{sr42} = B_{16}k^2 + (B_{66} + B_{12})k\bar{n} + B_{26}\bar{n}^{-2} - \Gamma_{45}\frac{1}{a} \\
k_{sr25} &= -k_{sr52} = B_{66}k^2 + B_{26}2k\bar{n} + B_{22}\bar{n}^{-2} - \Gamma_{44}\frac{1}{a} \\
k_{sr33} &= \frac{A_{22}}{a^2} + \Gamma_{55}k^2 + 2\Gamma_{45}k\bar{n} + \Gamma_{44}\bar{n}^{-2} \\
k_{sr44} &= D_{11}k^2 + 2D_{16}k\bar{n} + D_{66}\bar{n}^{-2} + \Gamma_{55} \\
k_{sr45} &= k_{sr54} = D_{16}k^2 + (D_{12} + D_{66})k\bar{n} + D_{26}\bar{n}^{-2} + \Gamma_{45} \\
k_{sr55} &= D_{66}k^2 + 2D_{26}k\bar{n} + D_{22}\bar{n}^{-2} + \Gamma_{44} \\
k_{si13} &= -k_{si31} = -\frac{A_{12}}{a}k - \frac{A_{26}}{a}\bar{n} \\
k_{si23} - k_{si32} &= -\frac{1}{a}\left[(A_{26} + \Gamma_{45})k + (A_{22} + \Gamma_{44})\bar{n}\right] \\
k_{si34} &= -k_{si43} = \left(\frac{B_{12}}{a} - \Gamma_{55}\right)k + \left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45}\right)\bar{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{si35} &= -k_{si53} = \left(\frac{B_{26}}{a} - \Gamma_{45}\right)k + \left(\frac{B_{22}}{a} - \Gamma_{44}\right)\bar{n} \\
[k_{sg1}(k)] &= [k_{sg1r}(k)] \\
[k_{sg2}(k, n)] &= [k_{sg2r}(k, n)] + i[k_{sg2i}(k, n)] \\
[k_{sg3}(k, n)] &= [k_{sg3r}(k, n)] + i[k_{sg3i}(k, n)] \\
k_{sg1r-11} &= k_{sg1r-22} = k_{sg1r-33} = k^2 \\
k_{sg2r-11} &= k_{sg2r-22} = k_{sg2r-33} = 2k\bar{n} \\
k_{sg2i-23} &= -k_{sg2i-32} = \frac{2k}{a} \\
k_{sg3r-11} &= k_{sg3r-22} = -k_{sg3r-33} = \bar{n}^{-2} \\
k_{sg3i-31} &= -k_{sg3i-13} = \frac{k}{a} \\
k_{sg3i-23} &= -k_{sg3i-32} = \frac{\bar{n}}{a}
\end{aligned}$$

Ek-IV

$[L_c]$ operatörleri :

$$\begin{aligned}
L_{c11} &= A_{11}(\cdot)_{,xx} + \frac{2A_{16}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{A_{66}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} \\
L_{c12} &= L_{c21} = \left(A_{16} + \frac{B_{16}}{a}\right)(\cdot)_{,xx} + \frac{1}{a}\left[A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12} + B_{66}}{a}\right](\cdot)_{,x\theta} \\
&\quad + \frac{1}{a^2}\left[A_{26} + \frac{B_{26}}{a}\right](\cdot)_{,\theta\theta} \\
L_{c13} &= L_{c31} = \frac{1}{a}\left[A_{12}(\cdot)_{,x} + \frac{A_{26}}{a}(\cdot)_{,\theta}\right] - B_{11}(\cdot)_{,xxx} - \frac{3B_{16}}{a}(\cdot) \\
&\quad - \frac{B_{12} + 2B_{66}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} - \frac{B_{26}}{a^3}(\cdot)_{,\theta\theta\theta} \\
L_{c22} &= \left[A_{66} + \frac{2B_{66}}{a} + \frac{D_{66}}{a^2}\right](\cdot)_{,xx} + \frac{2}{a}\left[A_{26} + \frac{2B_{26}}{a} + \frac{D_{26}}{a^2}\right](\cdot)_{,x\theta} \\
&\quad + \frac{1}{a^2}\left[A_{22} + \frac{2B_{22}}{a} + \frac{D_{22}}{a^2}\right](\cdot)_{,\theta\theta} \\
L_{c23} &= L_{c32} = \frac{1}{a}\left[A_{26} + \frac{B_{26}}{a}\right](\cdot)_{,x} + \frac{1}{a^2}\left[A_{22} + \frac{B_{22}}{a}\right](\cdot)_{,\theta} \\
&\quad - \left[B_{16} + \frac{D_{16}}{a}\right](\cdot)_{,xxx} - \frac{1}{a}\left[B_{12} + 2B_{66} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{a}\right](\cdot)_{,xx\theta} \\
&\quad - \frac{3}{a^2}\left[B_{26} + \frac{D_{26}}{a}\right](\cdot)_{,\theta\theta} - \frac{1}{a^3}\left[B_{22} + \frac{D_{22}}{a}\right](\cdot)_{,\theta\theta\theta} \\
L_{c24} &= A_{16}(\cdot)_{,xx} + \frac{A_{12} + A_{66}}{a}(\cdot)_{,x\theta} + \frac{A_{26}}{a^2}(\cdot)_{,\theta\theta} \\
L_{c25} &= \left(A_{66} + \frac{B_{66}}{a}\right)(\cdot)_{,xx} + \frac{2}{a}\left(A_{26} + \frac{B_{26}}{a}\right)(\cdot)_{,x\theta} + \frac{1}{a^2}\left(A_{22} + \frac{B_{22}}{a}\right)(\cdot)_{,\theta\theta} \\
L_{c26} &= \frac{1}{a}\left[A_{26}(\cdot)_{,x} + \frac{A_{22}}{a}(\cdot)_{,\theta}\right] - B_{16}(\cdot)_{,xxx} - \frac{1}{a}(2B_{66} + B_{12})(\cdot)_{,xx\theta} \\
&\quad - \frac{1}{a^2}(B_{26} + 2B_{26})(\cdot)_{,\theta\theta} - \frac{B_{22}}{a^3}(\cdot)_{,\theta\theta\theta}
\end{aligned}$$

$$L_{c33} = \frac{A_{22}}{a^2}(\) - \frac{2}{a} \left[B_{12}(\)_{,xx} + \frac{2B_{26}}{a}(\)_{,x\theta} + \frac{B_{22}}{a^2}(\)_{,\theta\theta} \right] + D_{11}(\)_{,xxxx} + \frac{4D_{16}}{a}(\)_{,x\theta x} + \frac{2D_{12} + 4D_{66}}{a^2}(\)_{,\theta\theta x} + \frac{4D_{26}}{a^3}(\)_{,\theta\theta\theta} + \frac{D_{22}}{a^4}(\)_{,\theta\theta\theta\theta}$$

$$L_{c34} = \frac{1}{a} \left(A_{12}(\)_{,x} + \frac{A_{26}}{a}(\)_{,\theta} \right)$$

$$L_{c35} = \frac{1}{a} \left(A_{26} + \frac{B_{26}}{a} \right) (\)_{,x} + \frac{1}{a^2} \left(A_{22} + \frac{B_{22}}{a} \right) (\)_{,\theta}$$

$$L_{c36} = -\frac{B_{12}}{a}(\)_{,xx} + \frac{1}{a^2} \left(A_{22}(\) - 2B_{26}(\)_{,x\theta} \right) - \frac{B_{22}}{a^3}(\)_{,\theta\theta}$$

[L_{cg1}] operatörleri :

$$L_{cg1-11}(\) = L_{cg1-22}(\) = -L_{cg1-33}(\) = (\)_{,xx}$$

$$L_{cg2-11}(\) = L_{cg2-22}(\) = L_{cg2-33}(\) = \frac{2}{a}(\)_{,x\theta}$$

$$L_{cg2-32}(\) = -L_{cg2-23}(\) = \frac{2}{a}(\)_{,x}$$

$$L_{cg3-11}(\) = L_{cg3-22}(\) = L_{cg3-33}(\) = \frac{1}{a^2}(\)_{,\theta\theta}$$

$$L_{cg3-32}(\) = -L_{cg3-23}(\) = \frac{1}{a^2}(\)_{,\theta}$$

$$L_{cg3-13}(\) = -L_{cg3-31}(\) = \frac{1}{a}(\)_{,x}$$

$$[k_c(k, n)] = [k_{cr}(k, n)] + i[k_{ci}(k, n)]$$

$$k_{cr11} = A_{11}k^2 + 2A_{16}k\bar{n} + A_{66}\bar{n}^{-2}$$

$$k_{cr12} = A_{16}k^2 + (A_{12} + A_{66})k\bar{n} + A_{26}\bar{n}^{-2} + \frac{1}{a} \left[B_{16}k^2 + (B_{66} + B_{26})k\bar{n} + B_{26}\bar{n}^{-2} \right]$$

$$k_{ci13} = -\frac{1}{a} \left(A_{12}k + A_{26}\bar{n} \right) - B_{11}k^3 - 3B_{16}k^2\bar{n} - (B_{12} + 2B_{66})k\bar{n}^{-2} - B_{26}\bar{n}^{-3}$$

$$k_{cr21} = A_{16}k^2 + (A_{12} + A_{66})k\bar{n} + A_{26}\bar{n}^{-2} + \frac{1}{a} \left(B_{16}k^2 + (B_{12} + B_{66})k\bar{n} + B_{26}\bar{n}^{-2} \right)$$

$$k_{cr22} = A_{66}k^2 + 2A_{26}k\bar{n} + A_{22}\bar{n}^{-2} + \frac{2}{a} \left(B_{66}k^2 + 2B_{26}k\bar{n} + B_{22}\bar{n}^{-2} \right) + \frac{1}{a^2} \left(D_{66}k^2 + 2D_{26}k\bar{n} + D_{22}\bar{n}^{-2} \right)$$

$$k_{ci23} = -\frac{1}{a} \left(A_{26}k + A_{22}\bar{n} \right) - \frac{1}{a^2} \left(B_{26}k + B_{22}\bar{n} \right) - B_{16}k^3 - (B_{12} + 2B_{66})k^2\bar{n} - 3B_{26}k\bar{n}^{-2} - \frac{1}{a} \left[D_{16}k^3 + (D_{12} + 2D_{66})k^2\bar{n} + D_{26}k\bar{n}^{-2} + D_{22}\bar{n}^{-3} \right]$$

$$k_{ci13} = -k_{ci31} = -\frac{1}{a} \left[A_{12}k + A_{26}\bar{n} \right] - B_{11}k^3 - 3B_{16}k^2\bar{n} - (B_{12} + 2B_{66})k\bar{n}^{-2} - B_{26}\bar{n}^{-3}$$

$$k_{ci23} = -k_{ci32} = -\frac{1}{a} \left[A_{26}k + A_{22}\bar{n} \right] - \frac{1}{a^2} \left[B_{26}k + B_{22}\bar{n} \right] - B_{16}k^3 - (B_{12} + 2B_{66})k^2\bar{n} - 3B_{26}k\bar{n}^{-2} - B_{22}\bar{n}^{-3} - \frac{1}{a} \left[D_{16}k^3 + (D_{12} + 2D_{66})k^2\bar{n} + 3D_{26}k\bar{n}^{-2} + D_{22}\bar{n}^{-3} \right]$$

$$k_{cr33} = -k_{cr33} = -\frac{A_{22}}{a^2} - \frac{2}{a} \left[B_{12}k^2 + 2B_{26}k\bar{n} + B_{22}\bar{n}^{-2} \right] - D_{11}k^4 - 4D_{16}k^3\bar{n} - (2D_{12} + 4D_{66})k^2\bar{n}^{-2} - 4D_{26}k\bar{n}^{-3} - D_{22}\bar{n}^{-4}$$

$$k_{cg1r-11} = k_{cg1r-22} = k_{cg1r-33} = k^2$$

$$k_{cg2r-11} = k_{cg2r-22} = k_{cg2r-33} = 2k\bar{n}$$

$$k_{cg2i-23} = -k_{cg2i-32} = \frac{2k}{a}$$

$$k_{cg3r-11} = k_{cg3r-22} = -k_{cg3r-33} = \bar{n}^{-2}$$

$$k_{cg3i-31} = -k_{cg3i-13} = \frac{k}{a}$$

$$k_{cg3i-23} = -k_{cg3i-32} = \frac{\bar{n}}{a}$$