



GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpaşa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
<http://dergipark.gov.tr/gbad>
Araştırma Makalesi (Research Article)

Cilt/Volume : 6
Sayı/Number: Özel
(ISMSIT2017)
Yıl/Year: 2017
Sayı/Pages: 30-39

Alınış tarihi (Received): 16.10.2017
Kabul tarihi (Accepted): 26.12.2017

Baş editor/Editors-in-Chief: Ebubekir ALTUNTAŞ
Alan editörü/Area Editor: Turgut ÖZSEVEN /
Bülent TURAN

Zaman Gecikmesine Sahip Kesir Dereceli Bir Kontrol Sisteminde Optimizasyon Metodu Kullanılarak PID Kontrolör Tasarımı

Tufan DOĞRUER^{a,*} Ali YÜCE^b Nusret TAN^b

^aGaziosmanpaşa Üniversitesi, Elektronik ve Otomasyon Bölümü, 60250, Tokat-Türkiye

^bİnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, 44280, Malatya-Türkiye

e-posta: ali.yuce@inonu.edu.tr, e-posta: nusret.tan@inonu.edu.tr

*Sorumlu yazar, e-posta: tufan.dogrue@gop.edu.tr

ÖZET: Bu çalışmada, zaman gecikmesine sahip kesir dereceli sistemlerin kontrolü için, PID kontrolör tasarımı gerçekleştirilmiştir. Zaman gecikmesi gerçek sistemlerde çoğunlukla karşılaşılan bir durumdur. Dolayısı ile zaman gecikmesi içeren sistemlerin modellenmesi de son derece önemli bir konudur. PID kontrolörler birçok avantajından dolayı yüksek bir kullanım alanına sahiptir. Yapısı basit, dayanıklı ve parametreleri kolay ayarlanabilir. PID kontrolör parametrelerinin elde edilmesi için Matlab/Simulink ortamında bir model oluşturulmuştur. Optimizasyon işlemi mevcut alternatifler arasından en iyisini seçme işlemidir. Günümüz dünyasında, bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler neticesinde, zor olarak değerlendirilen matematiksel hesaplamalar kolaylıkla yapılabilmektedir. Modeldeki kontrol sisteminde oluşan hata en küçük değerine ulaştığında, PID kontrolör parametreleri elde edilebilir. Kontrol sisteminde oluşan hatayı minimize etmek için integral performans kriterleri kullanılır. Matlab araç kutusunda minimizasyon ya da maksimizasyon için kullanılacak komutlar bulunmaktadır. Bu komutlar kullanılarak, en küçük hata değerini sağlayan kontrolör parametreleri esas alınarak tasarım gerçekleştirilir. Elde edilen grafiklerden optimizasyon yönteminin, zaman gecikmeli kesir dereceli kontrol sistemlerine başarılı bir şekilde uygulanabildiği görülmektedir.

Anahtar Kelimeler – PID kontrolör, Optimizasyon, Kesir dereceli kontrol sistemleri

PID Controller Design Using Optimization Method for Fractional Order Control Systems with Time Delay

ABSTRACT: In this paper, PID controller design was performed to control fractional order systems with time delay. Time delay is often the case in real systems. Therefore, modeling of time delayed systems is also an extremely important issue. PID controllers have a high usage area due to many advantages. Its structure is simple, durable and the parameters can be adjusted easily. A model was created in Matlab / Simulink environment to obtain PID controller parameters. Optimization is the process of selecting the best among the available alternatives. As a result of the developments in computer technology, difficult mathematical calculations can be done easily in today's world. The PID controller parameters can be obtained when the error occurring in the control system reaches the minimum value. Integral performance criteria are used to minimize the error. In Matlab Optimization Toolbox, there are commands that can be used for minimization or maximization. By using these commands, the design is performed based on the controller parameters that provide the smallest error value. From the graphs obtained, it is seen that the optimization method can be successfully applied to fractional order control systems with time delay.

Keywords – PID controller, Optimization, Fractional order control systems

1. Giriş

Kesirli hesaplamalar, geçmişi eskiye dayanmasına rağmen, yeteri kadar ilgi görmemiş fakat bilgisayar teknolojisinin gelişmesine bağlı olarak son yıllarda popülerliği hızla artan bir alan olmuştur. Leibniz ve L'Hospital (1695) arasında mektuplaşmayla başlayan kullanımı, Abel (1823) tarafından yapılan ilk uygulamayla devam etmiştir (Monje ve ark., 2010). Biyomühendislik, elektronik, robotik, sinyal işleme ve kontrol teorisi gibi bilim dallarında çalışmalar yapılmıştır (Gutiérrez ve ark., 2010). Tustin (1958) tarafından gerçekleştirilen ilk uygulamayla birlikte kontrol teorisi alanında kullanılmaya başlanmıştır (Tustin ve ark., 1958). Sonraki yıllarda Manabe yaptığı çalışmalarla literatüre katkı sağlamıştır (Manabe, 1961; Manabe, 1963).

Kontrol sisteminin temel görevi kendisinden beklenenleri yerine getirmektir. Daha geniş bir ifadeyle iyi bir cevap hızı, kararlı bir yapı, sürekli hal hatası küçük ve bozucu giderme özelliği olan bir kontrol sistemi tercih edilir. Kontrol sistemlerinde en temel elemanlardan birisi kontrol edilen sistem diğeri kontrolörlerdir. Tercih edilen kontrolör yapısı ve kontrolör parametrelerinin belirlenmesi kontrol sisteminin performansını doğrudan etkilemektedir. Bu çalışmada, kontrol sistemlerinde yüksek bir kullanım yüzdesine sahip PID (oransal-integral ve türev) kontrolörler tercih edilmiştir. PID kontrolörün parametrelerinin ayarlanmasında kullanılan birçok yöntem vardır. Bunlardan en çok bilinen Ziegler-Nichols yöntemidir (Ziegler ve Nichols, 1942). Klasik parametre ayarlama yöntemlerinin haricinde kullanılan optimizasyon yöntemleri de mevcuttur. Bu optimizasyon yöntemleri, kontrol sisteminde oluşan hatayı minimize ederek en uygun PID kontrolör parametrelerini belirlemeye yardımcı olurlar. Hatayı minimize etmek için integral performans kriterleri kullanılır.

Kesir dereceli sistemlerin modellenmesinde tamsayı dereceli yaklaşık modelleri kullanılır. Literatüre girmiş çok sayıda yöntem olmakta birlikte, bu çalışmada Oustaloup yaklaşıklık metodu kullanılmıştır.

Sunulan bu çalışma aşağıdaki şekilde organize edilmiştir. İkinci bölüm zaman gecikmesi içeren kesir dereceli sistemler ile ilgili temel bilgileri içermektedir. Üçüncü bölümde, integral performans kriterleri ve optimizasyon yönteminden kısaca bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, PID kontrolörler hakkında kısa bir bilgi ve yöntemin uygulamasına yer verilmiştir. Son bölüm, sonuç bölümüdür.

2. Zaman Gecikmesine Sahip Kesir Dereceli Sistemler

Kesir dereceli hesap uzun yıllardır bilinen bir matematik konusudur. Türev ya da integral dereceleri reel sayı alabilen, diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemlere kesir dereceli sistemler denir. ${}_a D_t^\alpha$ türev ya da integral operatörü olarak kabul edildiğinde en genel formda kesir dereceli türev ve integral Denklem 1'deki gibi ifade edilir (Matuš, 2011).

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{(-\alpha)} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Burada a ve t integral limitlerini, α ise türev derecesini gösterir.

Kesir dereceli türev ve integral için kullanılan birçok tanım vardır. Bunlardan en çok bilinenleri Grünwald-Letnikov ve Riemann-Lioville tanımıdır.

Grünwald-Letnikov tanımı Denklem 2’de verilmiştir (Matušů, 2011; Vinagre ve ark., 2007; Shah ve Agashe,2016).

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (2)$$

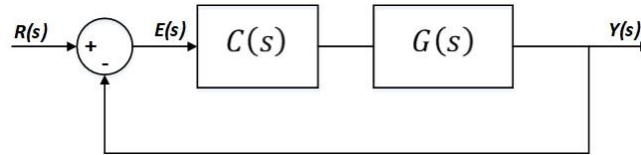
Riemann-Lioville tanımı Denklem 3’te verilmiştir. Burada, $\Gamma(\cdot)$ Euler’in gama fonksiyonudur ve $n-1 < \alpha < n$ şeklindedir (Matušů, 2011; Shah ve Agashe,2016; Barbosa ve ark., 2008).

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (3)$$

Grünwald-Letnikov ve Riemann-Lioville tanımlarının Laplace dönüşümleri Denklem 4’te verilmiştir.

$$L \left[{}_a D_t^\alpha f(t); s \right] = \int_0^\infty e^{-st} {}_a D_t^\alpha f(t) dt = s^\alpha F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^m (-1)^j {}_a D_t^{\alpha-m-1} f(t) \Big|_{t=0} \quad (4)$$

Kesir dereceli kontrol sistemleri, Şekil 1’de verilen birim geri beslemeli kontrol sisteminde ya kontrolörün ya da kontrol edilen sistemin türev ya da integral derecelerinin reel sayı olmasıyla oluşan sistemlerdir.



Şekil 1. Kapalı çevrim kontrol sisteminin blok diyagramı

Figure 1. Block diagram of closed loop control system

Şekil 1’de $R(s)$ giriş işareti, $Y(s)$ çıkış işareti, $C(s)$ kontrolör, $G(s)$ kontrol edilen sistem ve $E(s)$ hatayı göstermektedir.

Kesir dereceli dinamik bir sistem Denklem 5’teki diferansiyel denklemle gösterilebilir (Barbosa ve ark., 2008).

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} r(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} r(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} r(t) \quad (5)$$

Denklem 5’e Laplace dönüşümü uygulanırsa, kesir dereceli bir sistemin transfer fonksiyonu Denklem 6’daki gibi elde edilir (Matušů, 2011; Barbosa ve ark., 2008).

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (6)$$

Burada α_i ($i=0,1,2,\dots,n$) ve β_i ($i=0,1,2,\dots,m$) reel sayıları, a_i ($i=0,1,2,\dots,n$) ve b_i ($i=0,1,2,\dots,m$) sabit terimleri gösterir.

Denklem 6'da transfer fonksiyonuna üstel terim eklendiğinde zaman gecikmeli kesir dereceli bir transfer fonksiyonunu ifade eder ve Denklem 7 ile gösterilir.

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} e^{-Ls} \quad (7)$$

Kesir dereceli sistemlerin tamsayı dereceli yaklaşımlarının elde edilmesinde kullanılan metotlardan bazıları Matsuda, Oustaloup, Carlson ve Krishna metodu şeklindedir (Krishna, 2011). Bu çalışmada, kesir dereceli sistemlerin modellenmesinde Oustaloup metodu tercih edilmiştir. Oustaloup metodu hakkında detaylı bilgi için (Oustaloup ve ark., 2000) incelenebilir.

3. İntegral Performans Kriterleri

Kontrol sistemlerinin amacı bir sistemden istediğimiz cevabı alabilmektir. Kontrol sistemlerinin performansları değerlendirilirken giriş birim basamak cevabı uygulanır ve çıkış işaretinin girişi en uygun şekilde izlemesi istenir. Çıkış işaretinde geçici durum ve kalıcı durum cevabına bakılarak sistemin performansı hakkında bilgi sahibi olunur. Zaman cevabı parametrelerine göre tasarım yapmak zor olacağından, sistemde oluşan hatayı esas alarak kontrolör tasarımı yapmak daha uygun olur. Hata, giriş ve çıkış işareti arasındaki fark olarak tanımlanır ve Denklem 8 ile gösterilir (Atherton, 2009). Burada $r(t)$ giriş işareti, $y(t)$ çıkış işaretidir.

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (8)$$

Hatayı esas alarak en uygun kontrolör parametrelerinin belirlenmesi için integral performans kriterleri geliştirilmiştir. IAE, hatanın mutlak değerinin integrali (Integral Absolute Error) olarak ifade edilir ve Denklem 9 ile gösterilir. ISE, hatanın karesinin integralidir (Integral Squared Error) ve Denklem 10 ile ifade edilir. Denklem 11 ile gösterilen ITAE kriteri, hatanın zaman ağırlıklı mutlak değerinin integralidir (Integral Time Absolute Error). Son olarak ITSE kriteri, hatanın zaman ağırlıklı karesinin integralidir (Integral of Time-Weighted Squared Error) ve Denklem 12 ile hesaplanır. Denklemlerde, $e(t)$ kontrol sisteminde oluşan hatayı ve t zamanı ifade eder (Atherton, 2009; Tavazoei, 2010; Zhuang ve Atherton, 1993).

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (9)$$

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (10)$$

$$ITAE = \int_0^{\infty} t \cdot |e(t)| \cdot dt \quad (11)$$

$$ITSE = \int_0^{\infty} t \cdot e^2(t) \cdot dt \quad (12)$$

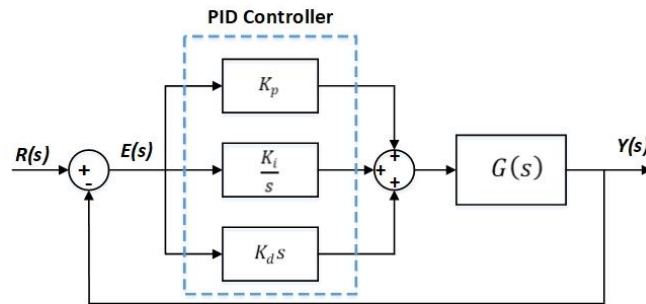
Optimizasyon işlemi, mevcut alternatifler arasından en iyisini seçme işlemidir. Çalışmada, optimizasyon için Simulink ortamında çeşitli modeller oluşturulur. Kesir dereceli sistemler, Oustaloup'un 5.dereceden tamsayı yaklaşım modeli kullanılarak modellenmiştir. PID kontrolörün K_p , K_i ve K_d parametrelerine başlangıç değerlerinin girilmesiyle optimizasyon algoritması başlatılır. İntegral performans kriterleri yardımıyla elde edilen hatanın minimum değerleri için en uygun PID kontrolör parametreleri hesaplanır.

4. PID Kontrolör Tasarımı ve Yöntemin Uygulanması

Bu bölümde, PID kontrolör tasarımı gerçekleştirilirken uygulanan yöntem anlatılmıştır. Ayrıca yöntemin uygulaması olarak zaman gecikmesine sahip kesir dereceli iki sistem örnek olarak sunulmuştur.

PID kontrolörler basit yapılarının yanında, parametrelerinin kolay ayarlama metotlarına sahip olmasından dolayı endüstride kullanılan en popüler kontrolörlerdir (Zhuang ve Atherton, 1993). Yapılan bir araştırmaya göre, kullanılan kontrol yapılarının %90'ında PI ve PID kontrolör yapıları bulunmaktadır (Monje ve ark., 2010).

PID kontrolör içeren birim geri beslemeli bir kontrol sistemi Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2. PID kontrolör içeren kapalı çevrim kontrol sisteminin blok diyagramı
Figure 2. Block diagram of closed loop control system with PID controller

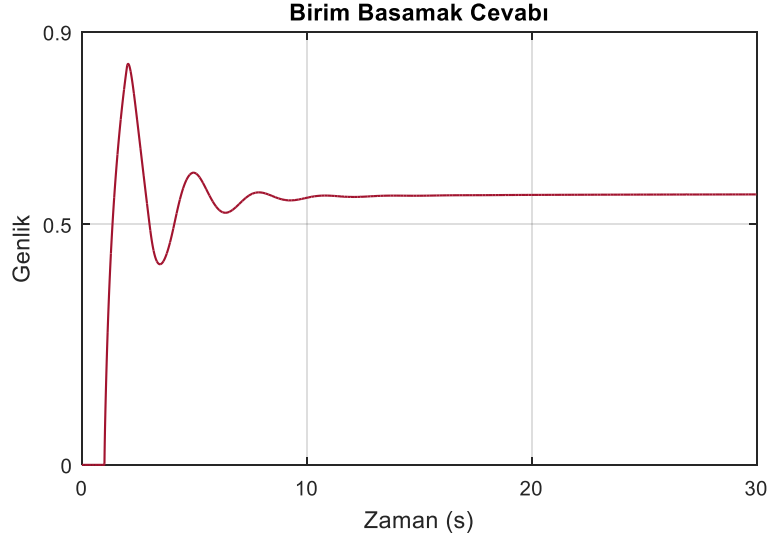
PID kontrolörün transfer fonksiyonu Denklem 13 ile ifade edilir. Burada K_p oransal terimin katsayısı, K_i integral terimi katsayısı ve K_d türev katsayısını göstermektedir (Zhuang ve Atherton, 1993).

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (13)$$

Örnek.1: Şekil 1'de verilen kontrol sisteminde zaman gecikmesine sahip kesir dereceli transfer fonksiyonunu aşağıdaki gibi düşünelim.

$$G_1(s) = \frac{1.3}{s^{0.8} + 1} e^{-s} \quad (14)$$

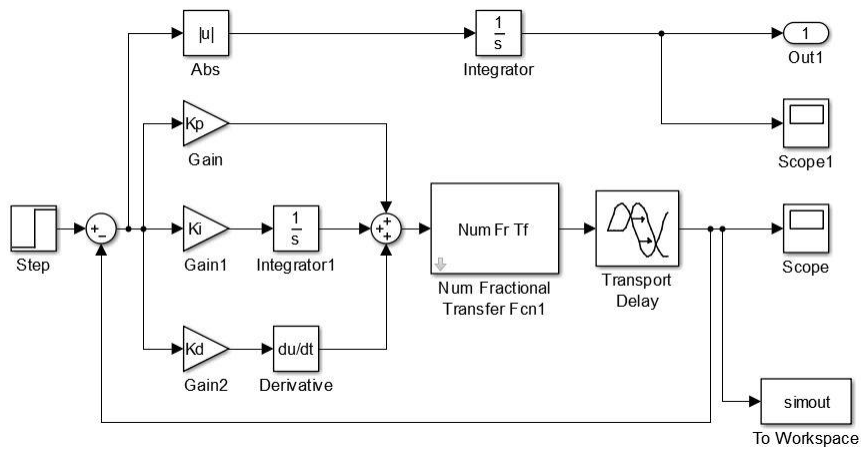
Denklem 14 ile verilen transfer fonksiyonuna ait kapalı çevrim sistemin birim basamak cevap eğrisi Şekil 3'te verilmiştir. Şekil incelenecek olursa, çıkış işaretinin giriş işaretini takip etmediği ve kalıcı hal hatasının büyük olduğu görülmektedir.



Şekil 3. $G_1(s)$ transfer fonksiyonu için kontrolsüz sistemin kapalı çevrim birim basamak cevabı

Figure 3. The unit-step response of the closed-loop system without controller for $G_1(s)$

Gerçekleştirilecek simülasyon için Şekil 4'te IAE kriteri için oluşturulan model verilmiştir. Benzer şekilde tüm integral performans kriterleri için Matlab/Simulink ortamında model oluşturulmuştur. Optimizasyonun başlatılmasıyla PID kontrolör parametreleri belirlenir. Belirlenen PID kontrolör parametreleri Çizelge 1'de verilmiştir.



Şekil 4. IAE için oluşturulan Simulink modeli

Figure 4. Simulink model for IAE criterion

Çizelge 1. Çeşitli integral performans kriterlerine göre PID kontrolör parametreleri
Table 1. PID controller parameters for various integral performance criteria

	<i>IAE</i>	<i>ISE</i>	<i>ITAE</i>	<i>ITSE</i>
K_p	0.507	0.815	0.815	0.26
K_i	0.508	0.507	0.618	0.442
K_d	0.078	0.062	0.154	0.228

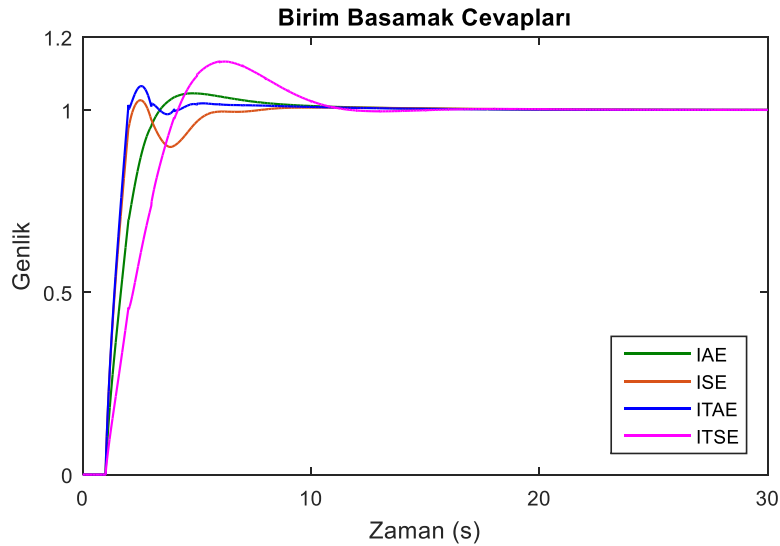
Çizelge 1’de verilen PID kontrolör parametrelerinin Denklem 14 ile verilen sisteme uygulanmasıyla sistemin çıkış karakteristikleri elde edilir. Farklı integral performans kriterleri için maksimum aşma (%) değerleri ve zaman parametreleri Çizelge 2’de verilmiştir.

Çizelge 2. Çeşitli integral performans kriterlerine göre maksimum aşma ve zaman parametreleri

Table 2. Percent overshoot values and time parameters for various integral performance criteria

	<i>IAE</i>	<i>ISE</i>	<i>ITAE</i>	<i>ITSE</i>
<i>Yükselme zamanı</i>	1.58	0.88	0.81	2.42
<i>Yerleşme zamanı</i>	7.85	5.23	2.95	10.19
<i>Tepe zamanı</i>	4.82	2.52	2.56	6.00
<i>Maksimum aşma</i>	4.55	2.64	6.52	13.28

PID kontrolörlü sistemin birim basamak cevap eğrileri Şekil 5’te gösterilmiştir.



Şekil 5. $G_1(s)$ için PID kontrolör ile denetlenen sistemlerin kapalı çevrim birim basamak cevapları

Figure 5. The unit-step responses of the closed-loop systems with PID controller for $G_1(s)$

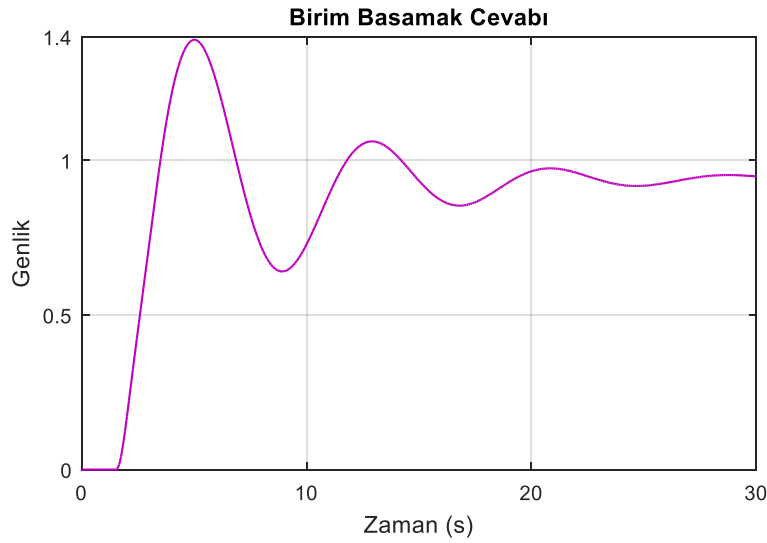
Şekil 5 incelendiğinde, integral performans kriterlerinin birbirinden farklı performanslar gösterdiği ve genel olarak, tasarlanan dört farklı PID kontrolöründe sistemi kontrol edebildiği açıktır. En düşük maksimum aşma ISE kriteri ile sağlanırken (%2.64), en kısa

tepe zamanı da ISE kriteri ile sağlanmıştır. Yükselme ve yerleşme zamanlarında ITAE performans kriteri daha başarılı sonuçlar vermiştir.

Örnek.2: Şekil 1’de verilen kontrol sisteminde zaman gecikmesine sahip kesir dereceli transfer fonksiyonunu aşağıdaki gibi düşünelim.

$$G_2(s) = \frac{1.2}{0.2s^{2.5} + 2s^{1.2} + 0.5s^{0.4}} e^{-1.5s} \quad (15)$$

Denklem 15’te verilen sistemin kapalı çevrim birim basamak cevap eğrisi Şekil 6’da gösterilmiştir. Kontrolörsüz sistemin maksimum aşmasının yaklaşık %40 ve kalıcı hal hatasına sahip olduğu şekilden görülmektedir.



Şekil 6. $G_2(s)$ transfer fonksiyonu için kontrolörsüz sistemin kapalı çevrim birim basamak cevabı

Figure 6. The unit-step response of the closed-loop system without controller for $G_2(s)$

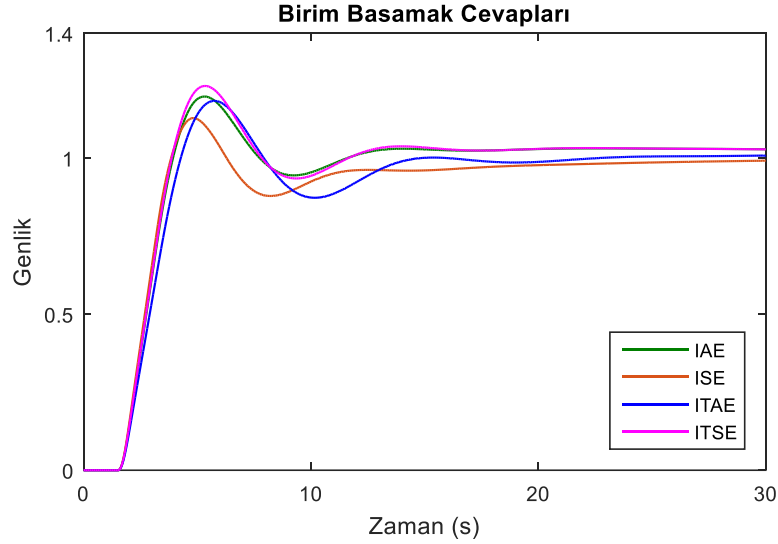
Optimizasyonda, farklı integral performans kriterleri için dört ayrı model oluşturulur. Her model için PID kontrolör parametreleri belirlenir. Belirlenen PID kontrolör parametreleri Çizelge 3’te verilmiştir.

Çizelge 3. Çeşitli integral performans kriterlerine göre PID kontrolör parametreleri

Table 3. PID controller parameters for various integral performance criteria

	IAE	ISE	ITAE	ITSE
K_p	0.817	0.888	0.724	0.824
K_i	0.044	0.016	0.023	0.046
K_d	2.495	0.431	0.031	0.249

Çizelge 3’teki PID kontrolör parametrelerinin Denklem 15’e uygulanmasıyla elde edilen birim basamak cevapları Şekil 7’de gösterilmiştir. PID kontrolörlü sistemin maksimum aşma (%) ve zaman parametreleri Çizelge 4’te verilmiştir.



Şekil 7. $G_2(s)$ için PID kontrolör ile denetlenen sistemlerin kapalı çevrim birim basamak cevapları

Figure 7. The unit-step responses of the closed-loop systems with PID controller for $G_2(s)$

Çizelge 4. Çeşitli integral performans kriterlerine göre maksimum aşma ve zaman parametreleri

Table 4. Percent overshoot values and time parameters for various integral performance criteria

	<i>IAE</i>	<i>ISE</i>	<i>ITAE</i>	<i>ITSE</i>
<i>Yükselme zamanı</i>	1.78	1.61	2.00	1.74
<i>Yerleşme zamanı</i>	10.92	21.38	13.58	11.10
<i>Tepe zamanı</i>	5.31	4.83	5.75	5.34
<i>Maksimum aşma</i>	19.7	12.80	18.30	23.10

Çizelge 2 ve 4'te verilen yerleşme zamanları %2 tolerans değerine göre hesaplanmıştır.

Şekil 7 incelenecek olursa, tasarlanan PID kontrolörlerin sistemi kontrol ettiği ve farklı performanslar sergiledikleri görülmektedir. Bu örnek için, Çizelge 4'te sunulan dört parametreye göre bir karşılaştırma yapıldığında ISE kriterinin daha başarılı sonuçlar verdiği söylenebilir. Sadece, yerleşme zamanında IAE kriteri daha başarılı olarak görülmektedir.

5. Sonuçlar

Kesir dereceli yaklaşımların en büyük avantajı gerçek sistemleri tamsayı dereceli yaklaşımlara göre daha iyi ifade edebilmesidir. Bu bağlamda, yapılan çalışmada zaman gecikmesine sahip kesir dereceli sistemler Matlab/Simulink ortamında modellenerek, en uygun şekilde PID kontrolör ile denetlenmesi gerçekleştirilmiştir. Çalışmada, iki farklı tipten zaman gecikmesine sahip kesir dereceli sistem örnek alınmış ve simülasyon çalışması yapılmıştır. Çeşitli integral performans kriterleri dikkate alınarak yapılan PID kontrolör tasarımında elde edilen sonuçlar grafikler ve tablolar halinde sunulmuştur. İntegral performans kriterlerinin PID kontrolör parametrelerinin belirlenmesinde farklı

sonuçlar ortaya çıkardığı, genel olarak ISE performans kriterinin daha başarılı olduğu görülmüştür. Optimizasyon yönteminin başarılı bir şekilde zaman gecikmeli ve kesir dereceli kontrol sistemlerine uygulanabildiği görülmüştür.

Teşekkür

Bu çalışma, TÜBİTAK 1001 programı çerçevesinde 115E388 No'lu proje olarak TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir. Bu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederiz.

Kaynaklar

- Atherton, D. (2009). Control engineering: Bookboon.
- Barbosa, R. S., Machado, J. T., & Jesus, I. S. (2008). On the fractional PID control of a laboratory servo system. IFAC Proceedings Volumes, 41(2), 15273-15278.
- Gutiérrez, R. E., Rosário, J. M., & Tenreiro Machado, J. (2010). Fractional order calculus: basic concepts and engineering applications. Mathematical Problems in Engineering, 2010.
- Krishna, B. T. (2011). Studies on fractional order differentiators and integrators: A survey. Signal Processing, 91(3), 386-426.
- Manabe, S. (1961). The noninteger integral and its application to control systems. English Translation Journal Japan, 6, 83-87.
- Manabe, S. (1963). The system design by the use of a model consisting of a saturation and noninteger integral. English Translation Journal Japan, 47-150.
- Matušů, R. (2011). Application of fractional order calculus to control theory (Vol. 5).
- Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu-Batlle, V. (2010). Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications: Springer Science & Business Media.
- Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B., & Nanot, F. M. (2000). Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 47(1), 25-39.
- Shah, P., & Agashe, S. (2016). Review of fractional PID controller. Mechatronics, 38(Supplement C), 29-41.
- Tavazoei, M. S. (2010). Notes on integral performance indices in fractional-order control systems. Journal of Process Control, 20(3), 285-291.
- Tustin, A., Allanson, J., Layton, J., & Jakeways, R. (1958). The design of systems for automatic control of the position of massive objects. Proceedings of the IEE-Part C: Monographs, 105(1S), 1-57.
- Vinagre, B. M., Monje, C. A., Calderón, A. J., & Suárez, J. I. (2007). Fractional PID controllers for industry application. A brief introduction. Journal of Vibration and Control, 13(9-10), 1419-1429.
- Zhuang, M., & Atherton, D. P. (1993). Automatic tuning of optimum PID controllers (Vol. 140).
- Ziegler, J. G., & Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. trans. ASME, 64(11).