



<http://kefad.ahievran.edu.tr>

Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi

ISSN: 2147 - 1037

Investigation of Mathematics Teachers' Understanding of Domain of Geometric Reflection Based on Motion and Mapping Perspectives

Murat Akarsu
Kübra İler

Article Information



DOI: 10.29299/kefad.982478

Received: 13.08.2021

Revised: 24.11.2021

Accepted: 17.03.2022

Keywords:

Geometric Reflection,
Mathematics Teachers,
Domain,
Motion Perspective,
Mapping Perspective

Abstract

The objective of this study is to reveal the perspectives of high school mathematics teachers in the domain of geometric reflection, to examine the transition processes from the motion perspective to the mapping perspective. The study was conducted with the participation of four high school mathematics teachers working in different private schools in Ankara during the summer term in 2021. The case study design was used in the research. Interviews were used as a data collection tool. The collected data were analyzed using APOS (action, process, object and schema) theory. Considering the findings of the study, while all four teachers initially had a motion perspective according to the domain of geometric reflection, three of the teachers still had a motion perspective, and only one teacher switched to the mapping perspective. Teachers only applied the geometric reflection to the shape while expressing the domain of geometric reflection. Factors such as the mathematical definition of the plane, the use of this definition in the geometric reflection, and the variety of shapes in the questions asked about geometric reflection (closed figure, open figure, points given inside and outside the figure) were effective in the transition from the motion perspective to the mapping perspective.

Matematik Öğretmenlerinin Yansıma Dönüşümünün Tanım Kümesini Hareket ve Eşleştirme Perspektiflerine Göre Anlamalarının İncelenmesi

Makale Bilgileri



DOI: 10.29299/kefad.982478

Yükleme: 13.08.2021

Düzeltilme: 24.11.2021

Kabul: 17.03.2022

Anahtar Kelimeler:

Yansıma Dönüşümü,
Matematik Öğretmenleri,
Tanım Kümesi,
Hareket Perspektifi,
Eşleştirme Perspektifi

Öz

Bu çalışmanın amacı lise matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümü tanım kümesinde sahip oldukları perspektifleri ortaya çıkarmak, hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş süreçlerini incelemek ve hareket veya eşleştirme perspektiflerine sahip olmalarının nedenlerini belirlemektir. Çalışma, 2020-2021 eğitim öğretim yılında yaz döneminde Ankara ilinde farklı özel okullarda görev yapan dört lise matematik öğretmeninin katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Veri toplama aracı olarak görüşmelerden yararlanılmıştır. Toplanan verilerin analizi APOS (eylem, süreç, nesne ve şema) teorisi kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmanın bulgularına göre, dört öğretmen de başlangıçta yansımanın tanım kümesi hareket perspektifine sahip iken, çalışma sonucunda üç öğretmenin yansımanın tanım kümesine göre hala hareket perspektifine sahip olduğu, yalnızca bir öğretmenin eşleştirme perspektifine geçiş sağladığı ortaya çıkarılmıştır. Öğretmenler yansımanın tanım kümesini ifade ederken yansıma dönüşümünü yalnızca şekle uyguladıklarını ifade etmeleri nedeniyle eşleştirme perspektifine geçiş sağlayamamışlardır. Hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçişte düzlemin matematiksel olarak tanımlanması, bu tanımın yansıma dönüşümünde kullanılması, yansıma dönüşümü uygulamaları istenilen sorularda şekillerin çeşitliliği (kapalı şekil, açık şekil, şeklin içinde ve dışında verilen noktalar, simetri ekseninin iki tarafında da şekil ve noktaların verilmesi vb.) gibi etkenler etkili olmuştur.

Sorumlu Yazar: Murat Akarsu, Dr., Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, drmuratakarsu@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-5883-5911

Kübra İler, Lisans Öğr., TED Üniversitesi, kubra.iler@tedu.edu.tr, ORCID ID: 0000-0002-3052-0256

Atf için: Akarsu, M., & İler, K. (2022). Matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümünün tanım kümesini hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre anlamalarının incelenmesi. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23(Özel Sayı), 561-611.

Giriş

Son yıllarda yapılan araştırmalar ve yayınlanan raporlara göre, yansıma dönüşümü konusunun ilkökul, ortaokul ve lisede öğretilmesi önem arz etmektedir (Ada ve Kurtuluş, 2010; Akarsu, 2018; Hollebrands, 2003; Knuchel, 2004; Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2010; Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi [National Council of Teachers of Mathematics] [NCTM], 2000). Çünkü yansıma dönüşümü konusu matematiğin günlük yaşamdaki rolünü anlamada (Hollebrands, 2003; Yanık, 2014), bazı matematik konularını (örn: fonksiyon, eşlik ve benzerlik, simetri) kavramsal olarak öğrenmede (Akarsu, 2022; Flanagan, 2001; Yanık, 2006), öğrencilerin örüntüleri keşfetmelerini ve çıkarım yapmalarını sağlamada, uzamsal becerileri kazanmada (Yanık, 2011), matematik problemlerini analiz etmede (Aktaş ve Ünlü, 2017) ve nokta, düzlem, doğru parçası, tanım kümesi, değer kümesi tanımlarının kavramsal olarak öğrenilmesinde önemlidir (Akarsu, 2018).

Yansıma dönüşümü ile ilgili yapılmış çalışmalarda, öğretmen adaylarının yansıma dönüşümünü anlamada birtakım zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir (Akarsu, 2018; Son ve Sinclair, 2010; Yanık, 2006). Bu zorluklar; yansıma dönüşümünü matematiksel olarak tanımlama (Desmond, 1997; Hacısalihoğlu Karadeniz, Baran, Bozkuş ve Gündüz, 2015; MhLolo ve Schafer, 2014), verilen şeklin yansımasını alırken simetri ekseninin eşit uzaklık ve diklik özelliklerini kullanabilme (Akarsu, 2018; Hacısalihoğlu Karadeniz ve ark., 2015; Harper, 2002; Yanık, 2006), yansıma dönüşümünün tanım kümesini matematiksel olarak açıklayabilme ve kullanabilme (Akarsu, 2018; Yanık, 2006), figürü veya noktayı düzlemden bağımsız olarak düşünerek şeklin hareket ettiğini düşünebilme (Akarsu, 2018; Harper, 2002; Yanık, 2006), düzlemi matematiksel olarak tanımlayabilme ve bu tanımlı yansıma dönüşümünde kullanabilmedir (Harper, 2002; Yanık, 2006).

Yapılan bu çalışmaların sonucunda, yansıma dönüşümünü kavramsal olarak anlamada iki önemli perspektifin olduğu vurgulanmıştır: hareket ve eşleştirme perspektifi (Hollebrands, 2003; Yanık, 2006). Hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre, yansıma dönüşümünün kavramsal olarak anlaşılmasında yansımanın tanım kümesinin önemli bir rolü vardır (Akarsu, 2018; Flanagan, 2001; Yanık, 2006). Alan yazında öğretmen adaylarının, yansımanın tanım kümesi alt konseptini anlamada hareket perspektifine sahip olduğu vurgulanmaktadır. (Akarsu, 2022; Yanık, 2006). Yansıma dönüşümünün tanım kümesinin hareket perspektifi olarak anlaşılması matematiksel olarak kavram yanılıdır (Flanagan, 2001; Yanık, 2006). Dolayısıyla, yansıma dönüşümünün kavramsal olarak anlaşılmasında eşleştirme perspektifine sahip olunması önemlidir.

Alan yazında yansıma dönüşümü ile ilgili yapılan tanımlamalar incelendiğinde hareket perspektifine yönelik tanımların olduğu görülmektedir (Demir ve Kurtuluş, 2019; Köse, 2012). Yansıma dönüşümü hareket perspektifine yönelik tanımlardan biri, verilen bir şeklin simetri eksenine göre çevrilmesi ve şeklin ilk haline göre ters bir görüntü elde edilebilmesi için şekillerin düzlem üzerindeki hareketi olarak gösterilebilir (MEB, 2018). Diğer yandan alan yazında yansıma dönüşümü eşleştirme

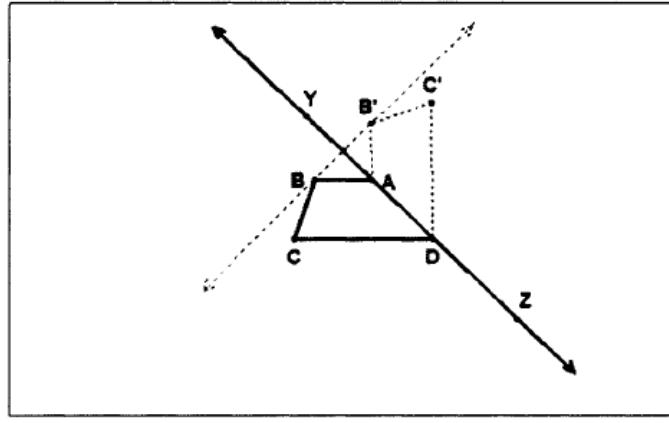
perspektifine yönelik olarak, düzlem üzerinde bulunan tüm noktaları eşit uzaklık ve diklik özelliklerini koruyarak yine aynı düzlem üzerinde noktalara dönüştüren birebir ve örten bir fonksiyon şeklinde tanımlanmaktadır (Coxford, 1973; Martin, 1982; Zembat, 2007). Hareket ve eşleştirme perspektiflerine yönelik verilen tanımlamalar incelendiğinde, hareket perspektifine yönelik kullanılan tanımlamada “şekillerin düzlem üzerindeki hareketi”, “şekillerin ters çevrilmesi” gibi yansıma dönüşümü hakkında kavram yanlışlarına yol açabilecek ifadeler yer verilirken, eşleştirme perspektifine yönelik kullanılan tanımlamada düzlem üzerinde bulunan tüm noktaların karşılıklı olarak hareket etmesi yerine birebir ve örten şekilde yansıması gerektiği ifadeleri kullanılır.

Önceki çalışmalar matematik öğretmen adaylarının yansıma dönüşümünü anlamadaki zorlukları açıklamaya odaklanmış olsa da matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümünü anlamalarındaki gelişimi inceleyen çalışma yoktur. Bu çalışmanın amacı, matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümünü tanım kümesi alt konseptine göre anlamada hangi perspektife sahip olduğunu inceleyerek, eğer hareket perspektifine sahiplerse, hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş sürecinin nasıl olması gerektiğini ortaya çıkarmaktır.

Öğretmen Adaylarının Yansıma Dönüşümünün Tanım Kümesi Alt Konseptini Hareket ve Eşleştirme Perspektifine Göre Anlaması

Matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümünü anlamaları ile ilgili çalışma yapılmamış olduğundan, öğretmen adayları ile yapılan çalışmalardan çıkarımlar yapılarak matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümünü anlamaları yorumlanacaktır.

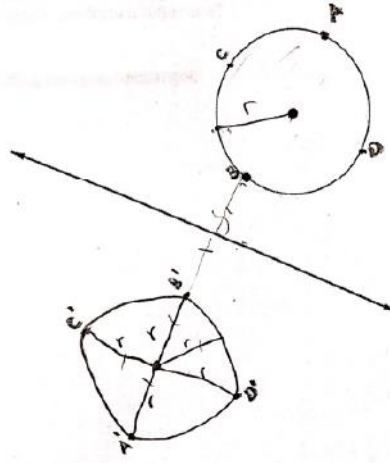
Alanyazında yapılan çalışmalar öğretmen adaylarının yansımanın tanım kümesi alt konseptinde hareket perspektifine sahip olduğunu göstermiştir (Akarsu, 2018; Harper, 2002; Yanık, 2006). Yansımanın tanım kümesi hareket perspektifine sahip öğretmen adayları düzlem üzerindeki tüm noktalar yerine sadece verilen figüre veya noktalara yansıma dönüşümünü uygulamışlardır. Örneğin, Yanık (2006) öğretmen adaylarından biriyle gerçekleştirdiği mülakat sürecinde bir ABCD yamuğunu yansıtmamasını istemiştir (Bkz. Şekil 1). Öğretmen adayı sadece yamuğun köşe noktalarını ve kenarlarını seçerek yansıma dönüşümünü tamamlamıştır. Yanık, köşe noktaları ve kenarlar dışında herhangi bir şey yansıttın mı diye sorduğunda, öğretmen adayı “hayır” cevabını vermiştir. Öğretmen adayı yansıma dönüşümünü uygularken düzlemdeki sonsuz noktanın yansıtılması gerektiğini ifade etmesi yerine sadece verilen şekli ve şekil üzerinde belirlenen noktaları yansıttığını ifade ettiği için yansımanın tanım kümesi hareket perspektifine sahiptir.



Şekil 1. Öğretmen adayının yansıma dönüşümünü yamuğa uygulaması (s. 98)

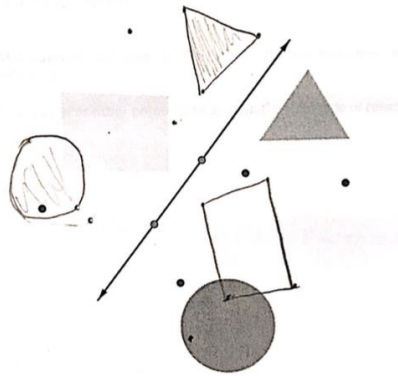
Harper (2002) çalışmasında, dört sınıf öğretmeni adayını ile geometrik dönüşümler konusunda var olan bilgileri ve gelişimleri hakkında gerçekleştirdiği çalışmada dinamik geometri yazılımı ortamında (The Geometer's Sketchpad) öğretmen adaylarının gelişimlerini analiz etmiştir. Yansıma dönüşümü hakkındaki yaptığı mülakatlardan elde ettiği sonuçlar doğrultusunda 4 öğretmen adayının da yansıtmaları gereken alanı (tanım kümesi) ifade etmekte zorluk yaşadıklarını belirlemiştir. Öğretmen adayları yansıma dönüşümünü uygularken sadece verilen şeklin yansımasını almışlar, şekli düzlemde bağımsız olarak düşünmüşler ve düzlem üzerinde başka hiçbir noktaya yansıma dönüşümü uygulamaları gerektiğini ifade etmemişlerdir. Yansıma dönüşümü uygulanırken düzlemdeki bütün noktaların yansıtılması yerine, yalnızca verilen şekli yansıttıkları için dört öğretmen adayını da yansımanın tanım kümesi hareket perspektifine sahiptir.

Akarsu (2018) ise dört matematik öğretmeni adayının yansıma dönüşümünü hareket ve eşleştirme perspektiflerine göre nasıl anladıklarını mülakatlar yaparak incelemiştir. İlk mülakatta dört öğretmen adayını da yansımanın tanım kümesini anlamada hareket perspektifine sahip oldukları görülmüştür. Dördüncü mülakat sonunda dört öğretmen adayını da yansımanın tanım kümesini anlamada eşleştirme perspektifine sahip olmuşlardır. Görüşmeler süresince yansıtılacak şekillerin çember, açık şekil, şeklin içinde ve dışında verilen noktalar ve simetri ekseninin her iki tarafında şekil ve noktalar verilmesi öğretmen adaylarının yansıma dönüşümünü sadece verilen şekil veya noktalara değil düzlemdeki bütün noktalara uygulamaları gerektiğini anlamada yardımcı olmuştur. Örneğin, İkinci mülakatta öğretmen adayına bir çember verilerek yansıma dönüşümünü uygulaması istenmiştir (Bkz. Şekil 2). Öğretmen adayını çember üzerinde birkaç nokta belirleyerek, simetri eksenine göre yansımasını alarak ve noktaları birleştirerek yansıma dönüşümünü tamamlamıştır. Öğretmen adayını "Çember üzerindeki noktalar dışında başka bir nokta yansıttın mı?" sorusuna, çemberin içindeki merkez noktasını düşünerek, aynı zamanda çemberin içerisinde sonsuz noktayı da yansıttığını" belirtmiştir. Çemberin içerisindeki merkez noktası öğretmen adayını yansıma dönüşümünü uygularken verilen şekillerin içerisindeki sonsuz noktanın da yansıtılması gerektiğini düşünmesine yardımcı olmuştur.



Şekil 2. Öğretmen adayının yansıma dönüşümünü çembere uygulaması (s. 69)

Akarsu (2018) dördüncü mülakatta ise öğretmen adayından düzlem üzerinde karşılıklı iki bölgede de bulunan şekillere ve noktalara yansıma dönüşümü uygulamasını istemiştir (Bkz. Şekil 3). Buradaki amaç simetri ekseninin sol tarafındaki sonsuz noktanın simetri ekseninin sağ tarafına, simetri ekseninin sağ tarafındaki sonsuz noktanın da simetri ekseninin sol tarafına yansıtılması gerektiğini düşünmelerini sağlamaktır. Diğer bir ifadeyle, yansıma dönüşümünün simetri ekseninin her iki tarafına uygulanması gerektiğinin anlaşılması amacı ile bu soru sorulmuştur. Öğretmen adayı verilen şekilleri ve noktaları kullanarak simetri eksenine göre yansıma dönüşümünü tamamlamıştır. Öğretmen adayı "Düzlem üzerinde hangi noktaları yansıttın?" sorusuna "Düzlem üzerinde bulunan bütün noktaları karşılıklı olarak yansıttığımı" belirtmiştir. Düzlem üzerinde karşılıklı bölgelerde verilen şekiller ve noktalar öğretmen adayının düzlem üzerindeki tüm noktaların yansıması gerektiğini düşündürmüştür.



Şekil 3. Öğretmen adayının düzlem üzerinde karşılıklı bölgelerde bulunan şekillere ve noktalara yansıma dönüşümü uygulaması (s. 75)

Yapılan çalışmalarda öğretmen adaylarına uygulanan mülakatlar sayesinde bazı öğretmen adayları yansımanın tanım kümesi hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçişi sağlamış olsalar da, bazı öğretmen adayları hala hareket perspektifinde kalmıştır. Bu çalışmada, Akarsu (2018)'in geliştirdiği görüşme soruları matematik öğretmenlerine uygulanarak, yansıma dönüşümünü

anlamadaki perspektifleri belirlenerek, eğer hareket perspektifine sahiplerse, hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş süreleri APOS teorisi ile incelenmiştir.

APOS Teorisi

Eylem, süreç, nesne ve şema (Action, Process, Object and Schema) (APOS) teorisi, matematiksel kavramların birey tarafından zihinde nasıl yapılandırıldığını ve bireyin kavramı nasıl anlayıp ifade ettiğini ortaya çıkaran bir modeldir (Dubinsky, 1991). APOS teorisi dört yapıdan oluşur ve bu yapılar 'aşama' olarak adlandırılan bir zihinsel yapı modelidir. Bu zihinsel yapılar sırasıyla "eylem, süreç, nesne ve şema"dır. Bu çalışmada, öğretmenlerin yansıma dönüşümü tanım kümesinde sahip oldukları zihinsel yapılarını ve gelişimlerini (hareket perspektifine mi, eşleşme perspektifine mi sahip olduklarını ya da hareket perspektifinden eşleşme perspektifine geçiş aşamalarındaki değişimlerini) incelemek için APOS teorisinden faydalanılmıştır.

Bireyler için bir matematiksel kavramın zihinde daha anlamlı bir hale gelmesi, zihinsel yapılar arasında kurulan bağlantılarla doğru orantı göstermektedir. Kurulan bağlantılar bireylerin zihninde şemaları oluşturur ve bu şemalar kavram hakkındaki matematiksel durumların anlam kazanmasına yardım eder (Arnon ve diğerleri, 2014). Yansıma dönüşümü tanım kümesi alt konseptinde, öğretmenlerin hareket perspektifinden eşleşme perspektifine geçişlerini ortaya çıkarmak için eylem (action) ve süreç (process) zihinsel yapılarına sahip olmaları yeterlidir (Akarsu, 2018; Yanık, 2006). Dolayısıyla, bu çalışmada eylem ve süreç zihinsel yapılarının kullanılması yeterli olacaktır. Çalışmada nesne (object) ve şema (schema) zihinsel yapıları kullanılmayacaktır.

Eylem zihinsel yapısı, bir matematiksel kavramın anlamlandırılması için yapılan ilk dönüştürme işlemidir. Eylem zihinsel yapısına sahip bir birey için dışsal bir yardım olmadan o kavrama dair herhangi bir dönüşüm yapmak mümkün değildir. Dışsal yardımlar kavramla ilgili formül, ipucu ve benzer örnekler olabilir (Oktaç ve Çetin, 2016). Dışsal bir yardım olmadan dönüşüm yapılamadığı için, uygulanan dönüşümlerin de zihinde canlandırılması mümkün olmaz. Dönüşüm uygulayan birey her adımı açıkça gerçekleştirmek zorundadır. Yansıma dönüşümünün tanım kümesi anlamada eylem zihinsel yapısına sahip olan bir birey yansımanın tanım kümesini, sadece belirtilen şekil ya da noktalar olduğunu düşünür ve sadece bu şekle veya noktaya dönüşüm uygular. Örneğin öğretmen adaylarından düzlem üzerinde bulunan bir figüre yansıma dönüşümü uygulamaları istendiğinde öğretmen adayları sadece figüre ait noktaları yansıttıklarını ifade ederler.

Süreç zihinsel yapısı, eylemin sürekli tekrarlanarak ya da başka eylemlerle bağlantı kurularak içselleştirilmesi sonucu matematiksel kavramın anlamlandırılmış halidir. Eylem zihinsel yapısındaki ve süreç zihinsel yapısındaki matematiksel kavramda anlamsal olarak bir farklılık yoktur. Eylem zihinsel yapısındaki bir birey dönüşümü gerçekleştirmek için sürekli dışsal ipuçlarına ihtiyaç duyarken, süreç zihinsel yapısındaki bir bireyin dışsal yardıma ihtiyacı yoktur. Birey eylemi tekrarlayarak içselleştirmiştir ve yaptığı dönüşümlerin bilincinde olarak zihninde formüllere ya da diğer ipuçlarına

ihtiyaç duymadan canlandırabilir. Bireyler eylem zihinsel yapısında her adımı gerçekleştirmek zorunda iken, süreç zihinsel yapısında her adımı gerçekleştirmek zorunda değildir (Dubinsky, 1991). Yansıma dönüşümünün tanım kümesi anlamada süreç zihinsel yapısına sahip olan bir birey yansımanın tanım kümesini sadece verilen şekil veya nokta olarak değil, düzlem üzerindeki tüm noktaların yansıması olarak düşünür ve ifade eder.

Literatürde APOS teorisi çerçevesini kullanarak öğretmen adaylarının geometrik dönüşümleri nasıl anladıklarını ve zihinsel yapılarını ortaya çıkaran çalışmalar vardır (Akarsu 2018; Yanık, 2006). Akarsu (2018) yaptığı çalışmasıyla öğretmen adaylarının geometrik yansımada zihinsel yapılarının hareket perspektifinden eşleşme perspektifine nasıl geçtiklerini ve hangi faktörlerin bu dönüşümde etken olduğunu ortaya çıkarmıştır. Öğretmenlerin geometrik yansımada zihinsel yapılarını APOS teorisi çerçevesi ile incelendiği bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışma öğretmenlerin yansıma dönüşümü tanım kümesini anlamada sahip oldukları perspektifleri nedenleri ile belirleyerek, hareket perspektifinden eşleşme perspektifine nasıl geçtiklerini eylem ve süreç zihinsel yapılarını kullanarak ortaya çıkarmaktır. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara cevap aranmıştır.

1- Lise matematik öğretmenleri yansıma dönüşümünün tanım kümesi alt konseptini anlamada hangi perspektife sahiptirler?

2- Lise matematik öğretmenlerinin hareket veya eşleştirme perspektifine sahip olmalarının nedenleri nelerdir?

Yöntem

Araştırma Deseni

Bu çalışmada, matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümü tanım kümesi alt konseptini anlamada hangi perspektife sahip olduklarını belirlenmesi ve hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş süreçlerini derinlemesine analiz edilmesi ihtiyacından dolayı nitel araştırma desenlerinden biri olan durum çalışması deseni kullanılmıştır. Durum çalışmaları, araştırmacının çalışmaya müdahalesi olmadan çalışılan durum üzerinde 'nasıl' ve 'neden' sorularına cevap bulmak için kullanılan bir desendir (Yıldırım ve Şimşek, 2011; Yin, 2009). Her bir öğretmenin sahip olduğu perspektif (hareket ve eşleştirme perspektifleri); mesleki deneyim süresi, öğretmen hazırlık programlarında aldıkları bilgi ve becerileri ve derslerinde matematik konularını öğretme stratejileri gibi farklı parametrelere bağlı olarak değişkenlik gösterebilir. Bu farklılıkları tespit etmek ve nedenlerini ortaya çıkarmak için matematik öğretmenleri ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşme kişilerin durumlara bakış açılarını, duygularını, deneyimlerini ve düşünce yapılarını ortaya çıkarmada önemli bir veri toplama aracıdır (Merriam, 2013). Bu çalışmada matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümünün tanım kümesi alt konseptinde hareket perspektifine mi, eşleştirme perspektifine mi sahip olduklarını belirlemek, bu perspektiflere sahip olmalarının

nedenlerini açıklamak ve hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş sürecinin nasıl olması gerektiğini ortaya çıkarmak için öğretmenlerle görüşmeler yapılmıştır.

Çalışma Grubu

Bu araştırmada çalışma grubunun tamamını Ankara ilinde MEB'e bağlı farklı özel okullarda görev yapan hepsi farklı üniversitelerden mezun olmuş ikisi kadın, ikisi erkek olmak üzere toplamda dört lise matematik öğretmeni oluşturmuştur. Çalışmanın katılımcılarının belirlenmesinde, araştırma sürecinin hızlı ve pratik bir biçimde tamamlanabilmesi için kolay ulaşılabilir durum örnekleme kullanılmıştır (Patton, 1987). Katılımcılar, çalışmanın araştırmacıları tarafından görüşmelerin uygun, hızlı ve pratik biçimde yapılabilmesi amacıyla belirlenmiştir. Matematik öğretmenlerinin mesleki deneyim süreleri en az iki, en fazla yirmi yıldır. Çalışma grubunda yer alan öğretmenlerin isimleri çalışmanın etiği açısından gizli tutularak Zeynep, Betül, Okan ve Mehmet olarak kodlanmıştır. Çalışma grubunu oluşturan matematik öğretmenlerine ait cinsiyet, yaş ve mesleki deneyim sürelerine ait demografik dağılım bilgileri Tablo 1' de belirtilmiştir.

Tablo 1. Matematik öğretmenlerine ait demografik özellikler

Katılımcılar	Cinsiyet	Yaş	Mesleki deneyim süresi (yıl)
Zeynep	K	26	2
Betül	K	33	9
Okan	E	39	16
Mehmet	E	44	20

Çalışma grubunu oluşturan öğretmenlerin çalışmaya katılımları tamamen gönüllülük esasına dayandırılmıştır. Çalışma grubunu oluşturan kadın öğretmenlerden birisi fen edebiyat fakültesi matematik bölümü mezunu olduktan sonra pedagojik formasyon eğitimi alarak mesleğe başlamış, diğer kadın öğretmen ise matematik öğretmenliği bölümü mezunu olup lisansüstü eğitime başlamasına rağmen birinci yıl sonunda lisansüstü eğitimi bırakarak tamamen öğretmenliğe yönelmek amacıyla özel bir okulda göreve başlamıştır. Çalışmaya katılan erkek öğretmenlerden biri fen edebiyat fakültesi matematik bölümü mezunu olup lisansüstü eğitimini tamamlayarak matematik öğretmenliği mesleğine başlamış, diğer erkek öğretmen ise fen edebiyat fakültesi matematik bölümü mezunu olduktan sonra pedagojik formasyon eğitimi alarak mesleğe başlamıştır. Çalışma grubunda cinsiyet dağılımı belirli bir kriter olmadan bağımsız olarak belirlenmiştir.

Veri Toplama Araçları

Nitel araştırma yönteminden yararlanılan bu çalışmada veri toplama aracı olarak görüşmelerden yararlanılmıştır. Görüşme soruları, araştırmacının doktora tezi görüşme soruları (Akarsu, 2018) dikkate alınarak matematik öğretmenlerinin yansıma dönüşümü tanım kümesi alt konseptinde sahip oldukları perspektiflerin ortaya çıkarılması, bu perspektiflere sahip olmalarının

nedenleri ve hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş sürecinde hangi zihinsel yapıların oluşturulduğunun belirlenmesi amacıyla derinlemesine veri elde edebilmek için oluşturulmuştur. Görüşmelerde öğretmenlere sorulması planlanan soruların, çalışmanın amacına uygun olup olmadığının belirlenebilmesi, soruların açık bir dille yazılıp yazılmadığının anlaşılması ve tekrara düşmemek için gereksiz soru kullanımından kaçınılmasına yönelik uzman görüşü alınarak içerik-kapsam geçerliliğine bakılmıştır. Uzmanlardan gelen geri dönütler doğrultusunda gerekli düzenlemeler yapılarak (bazı soruların sırası değiştirildi, bazı sorular çıkarıldı) çalışmada yer alan dört lise matematik öğretmenine yöneltilmiştir. Bu çalışmada araştırmanın amacına uygun şekilde hazırlanmış olarak bir tanesi kişisel tanıma görüşmesi, üç tanesi yansıma dönüşümüne yönelik olmak üzere toplamda dört adet yarı yapılandırılmış görüşme kullanılmıştır. İlk görüşmede öğretmenlerin kişisel bilgilerinin tanımlanması (örn: mesleki deneyim süresi, eğitimsel amaçları, matematik alt yapısı, sınıf yönetimi, yansıma dönüşümü hakkında bildiği kavramların tanımları) amaçlanmıştır. İkinci mülakattan itibaren dördüncü mülakatın sonuna kadar öğretmenlerin yansıma dönüşümü hakkında sahip oldukları perspektifleri ortaya çıkarmak amacıyla sorular hazırlanmıştır. Hazırlanan mülakatlar, öğretmenlere yöneltilen sorulara yazarak ya da çizerek uygulamalı şekilde göstermelerine imkan verecek şekilde oluşturulmuştur. Mülakatların soru dizilimi, katılımcının her sayfada bir soru görmesini ve yalnızca o soruya odaklanarak diğer soruları görmeden cevap vermesi sağlanacak şekilde düzenlenmiştir. Her bir görüşmede hazırlanan sorular, araştırmanın amacı doğrultusunda kapsamlı bir gözlem yapmak adına özenle oluşturulmuş farklı soru tiplerini içermektedir. Mülakatlar süresince çalışma grubunu oluşturan öğretmenlere araştırmacılar tarafından yöneltilen soru tipleri örnekleri Tablo 2’de belirtilmiştir.

Tablo 2. Matematik öğretmenlerine yöneltilen örnek görüşme soruları

Kişisel bilgileri tanımlamaya yönelik sorular

- Kendinden biraz bahseder misiniz? (İsim, soy isim, hangi okuldan mezun, kaç yıllık öğretmen, alanı)
- Öğretmen olmaya nasıl karar verdiniz?
- Kendiniz için ve öğrencileriniz için eğitimsel amaçlarınız nelerdir?
- Kendinizi bir matematik öğretmeni olarak nasıl anlatırsınız, ders işleme şekliniz nedir?
- Bir matematik konusunun sınıf ortamında anlaşılıp anlaşılmadığını nasıl tanımlarsınız?
- Geometri derslerine giriyor musunuz? Evet ise, dersinizde yansıma dönüşümünü anlattınız mı? En son ne zaman anlattınız? Konuya dair deneyimlerinizi veya hatırladıklarınızı açıklar mısınız?
- Yansıma dönüşümü hakkında ne öğretiyorsunuz?
- Kendi kelimelerinizi kullanarak ya da çizerek; geometrik yansımayı, simetri eksenini, noktayı, çizgiyi ve uzayı tanımlar mısınız?
- Yansıma dönüşümü ile ilgili özelliklerden bahseder misiniz? Ya da formüller var ise açıklar mısınız?

Yansıma dönüşümünde sahip oldukları perspektifi ortaya çıkarmaya yönelik sorular

- Bu bir yansıma mıdır?
- Verilen şekillere göre simetri eksenini bulur musunuz?
- Simetri eksenini, nokta ve düzlemi tanımlar mısınız?
- Yansıma dönüşümünü nasıl yaptığınızı açıklar mısınız?
- Yansıma dönüşümünü tanımlar mısınız?
- Simetri eksenini aşağı ya da yukarı kaydırdığımda ne gibi değişiklikler olur?
- Yansıma dönüşümü yapabilmek için hangi bilgilere ihtiyaç vardır?
- Yansıma dönüşümünü yaparken neyi yansıttınız?
- Bu noktalar dışında başka bir nokta yansıttınız mı? Evet ise bunlar nelerdir?

Veri Toplama Süreci

Veri toplama sürecinde öğretmenlerle gerçekleştirilen mülakatların tamamı Covid 19 pandemi tedbirleri dikkate alınarak yüz yüze yapılmıştır. Her biri Ankara ilinde yaşayan öğretmenler ile ayrı ayrı görüşmek üzere, onların ders programlarına uyan bir takvim oluşturulmuştur. Uygulama sürecinde, hazırlanan görüşmelerin her biri farklı günlerde öğretmenlere uygulanmıştır. Görüşmeleri gerçekleştirmek için mekân olarak öğretmenlerin görev yaptıkları okullar tercih edilmiştir. Görüşme sürecinde öğretmenlerin izni ve rızası alınarak araştırmacı tarafından ses kayıt cihazı ile ses kaydı ve video kamera ile video kaydı alınmıştır. Gerçekleştirilen her bir görüşme en az yirmi beş en fazla altmış dakikalık zaman diliminde yapılmıştır. Bir öğretmen ile gerçekleştirilen mülakatların sıklığı en fazla dört gün aralıklı olarak planlanmış ve uygulanmıştır. Görüşmeler bir araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Görüşme sürecinde araştırmacı katılımcı ile gün içerisinde bir araya gelmiş, görüşmeyi öğretmene sunmuş ve soruları öğretmene yönelterek cevaplamasını ve gerekli olduğu yerlerde çizimle uygulamasını istemiştir. Veri toplama süreci tamamlandığında ses ve video kayıtları çalışmanın araştırmacıları tarafından transkript edilerek analiz süreci için hazır duruma getirilmiştir.

Toplanan Verilerin Analizi

Çalışmanın veri analizi, öğretmenlerle görüşmeler süresince uygulanan yarı yapılandırılmış mülakat dokümanlarından, video ve ses kayıtlarından yararlanılarak yapılmıştır. Mülakatlardan elde edilen ses ve video kayıtları transkript yöntemi ile bilgisayar ortamına kaydedilmiştir. Toplanan bütün veriler transkript edildikten sonra, çalışmaya katılan öğretmenlerin görüşme süresince kendilerine yöneltilen sorulara çizimler, sözel olarak verdikleri yanıtlar ve ses kayıtlarındaki ifadelerinden yola çıkılarak hipotezlere dayalı bir kodlama yapılması planlanmıştır. Kodlama süresince öğretmenlerin sahip oldukları perspektifler, bu perspektiflere sahip olma sebepleri ve hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş süreçlerindeki gelişimleri ortaya çıkarılmıştır. Bu çalışmada veri analizi sürecinde APOS teorisi kapsamında eylem (action) ve süreç (process) zihinsel yapıları kullanılarak öğretmenlerin yansıma dönüşümü tanım kümesinde gösterdikleri zihinsel gelişim süreçleri kodlamalar yoluyla ortaya çıkarılmıştır. Kodlama sürecinde, doğru bilgilere ulaşabilmek ve doğru analizleri yapabilmek adına iki araştırmacı tarafından ayrı ayrı kodlamalar yapılmıştır. Daha sonra yapılan kodlamalar birbiri ile karşılaştırılmıştır. Farklılıklar varsa tartışılarak verilerin analizine ait kodlamalara son şeklin verilmesi sağlanmıştır. Örnek kodlama Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. Örnek kodlama

Kod	Örnek katılımcı cevabı	Yorumlama
Yansımanın tanım kümesi eylem zihinsel yapısı	<p>A: Verilen şeklin [bir doğru parçası, doğru parçası üzerinde ve doğru parçası dışında verilen bir nokta] ve noktanın yansımasını tamamladıktan sonra, düzlem üzerinde neyi yansıttığını açıklar mısınız?</p> <p>M: Şeklin bütününe baktığımda, bir doğru parçası ve iki nokta görüyorum. Ben burada doğru parçasını ve iki noktayı yansıttım.</p> <p>A: Bu noktalar dışında başka bir nokta yansıttın mı?</p> <p>M: Hayır yansıtmadım.</p>	<p>Öğretmenin verdiği yanıtta göre, kendisi bu soruda düzlemin yalnızca bir yarısından (şeklin ve noktaların olduğu yarı düzlem) diğer yarısına yansıma yaptığını düşünmektedir. Aynı zamanda öğretmen düzlemin sonsuz noktadan oluştuğunun farkında değildir. Yansımanın tanım kümesini yalnızca verilen şekil (doğru parçası) ve iki nokta olduğunu belirtmiştir. Öğretmen burada yansımanın tanım kümesi eylem zihinsel yapısına yani hareket perspektifine sahiptir.</p>
Yansımanın tanım kümesi süreç zihinsel yapısı	<p>A: Verilen şekillerin ve noktaların [Düzlemin sağında üçgensel ve dairesel bölge, solunda dikdörtgensel bölge, simetri eksenini üzerinde iki nokta] yansımasını tamamladıktan sonra, düzlem üzerinde neyi yansıttığını açıklar mısınız?</p> <p>M: Tüm düzlemi karşılıklı olarak yansıttık. Yansımanın yalnızca düzlemin tek tarafında (düzlemin yarısından bahsediyor) gerçekleştiğini, düzlemin diğer yarısının boş olduğunu düşünürüz fakat boş değildir. İki düzlem parçası da sonsuz noktadan oluşur ve biz bu tüm noktaların tamamını yansıtmış oluruz. Tüm noktaları uygun şekilde diğer bölgeye taşıyoruz.</p>	<p>Görüşme sırasında öğretmenin yanıtına göre, her iki yarım düzlem üzerinde karşılıklı verilen şekilleri gördüğünde, her iki düzlem parçasının da sonsuz noktalardan oluştuğunu, her iki yarım düzleminde karşılıklı olarak yansıması gerektiğini belirtmiştir. Öğretmen burada yansımanın tanım kümesi süreç zihinsel yapısına yani eşleştirme perspektifine geçiş yapmıştır.</p>

Araştırmanın Etik İzinleri

Yapılan bu çalışmada “Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler” başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirini gerçekleştirilmemiştir.

Etik kurul izin bilgileri:

Etik değerlendirmeyi yapan kurul adı = Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Etik Kurulu

Etik değerlendirme kararının tarihi= 08.09.2021

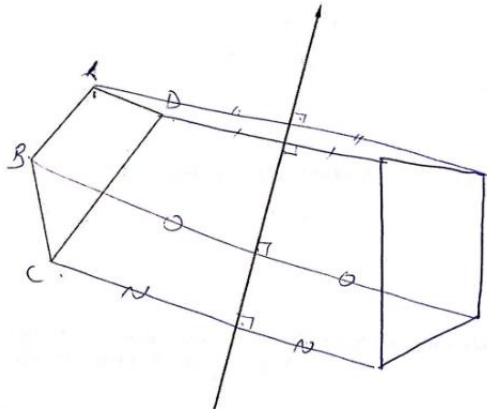
Etik değerlendirme belgesi sayı numarası= 214

Bulgular

Tanım kümesinin düzlemdeki sonsuz noktalardan oluştuğunun bilinmesi yansıma dönüşümünü kavramsal olarak anlamada ve uygulamada önemli bir konsepttir. Öğretmenler ile yapılan görüşmelerin sonucunda yansıma dönüşümünü anlamada üç farklı anlayış ortaya çıkmıştır: (1) yansıma dönüşümü tanım kümesinin sadece verilen şekil ve noktalar olarak anlaşılması, (2) yansıma dönüşümü tanım kümesinin verilen şekil ve noktalar dışında şeklin iç ve dış noktaları olarak anlaşılması (3) yansıma dönüşümü tanım kümesinin düzlemdeki bütün noktalar olarak anlaşılması

Yansıma dönüşümü tanım kümesinin sadece verilen şekil ve noktalar olarak anlaşılması

Öğretmenler ile yapılan ilk görüşmede, dört öğretmenin de yansımanın tanım kümesini anlamada eylem zihinsel yapısına sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Yani dört öğretmen de yansıma dönüşümünü uygularken verilen şekle ve noktalara uygulayarak şeklin içini ve dışını boş olarak düşünmüşlerdir. Örneğin, öğretmenlere bir ABCD yamuğu verilip eğik simetri eksenine göre yansıma dönüşümü uygulamaları istenmiştir (Bkz. Şekil 4).



Şekil 4. Birinci görüşme örnek yansıma dönüşümü

İlk olarak, dört öğretmen de dörtgenin köşe noktalarını seçerek simetri eksenine göre yansımalarını almışlardır. Daha sonra noktaları birleştirerek yansıma dönüşümünü tamamlamışlardır. Yansıma dönüşümünü yaparken düzlem üzerinde neyi yansıttın sorusuna, öğretmenlerin cevapları aşağıdaki gibi olmuştur (Bkz. Tablo 4).

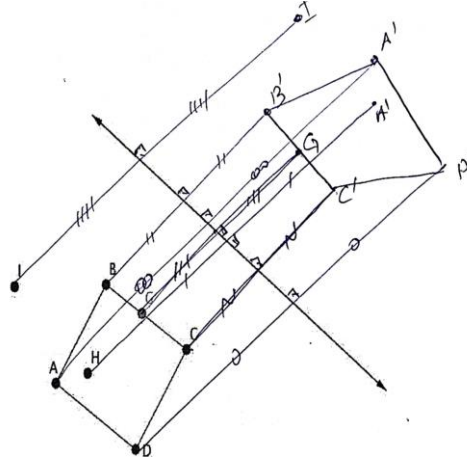
Zeynep	Betül	Okan	Mehmet
Z: Dörtgeni yansıttım, bu bir yamuk yamuğu yansıttım.	B: Düzlem üzerinde yine şeklin önce köşe noktalarının eksene olan uzaklıklarını buldum, sonra bu uzaklıklara eşit uzaklıkları diğer bölgede oluşturdum, sonra kenarları birleştirdim.	O: Yansıma yaparken sadece o dörtgenin yansımını yapmadık, köşe noktalarının yansımını yaptık. Ayrıca oradaki doğru parçalarının yani şeklin üzerindeki dörtgenin kenar uzunluklarının da yansımalarını yaptık. Eğer yaptığımız yansıma bir dörtgensel bölge olsaydı o içindeki noktaların da yine yansımalarını yapmış olacaktık.	M: Düzlem üzerinde noktaları yansıttım.
A: Dörtgen haricinde başka bir nokta yansıttınız mı?	A: Bu noktalar dışında herhangi bir nokta yansıttınız mı?	A: Peki bu soru için yapmış olduk mu?	A: Hangi noktaları yansıttın?
Z: Dik uzaklıkları, kenarları, köşeleri. Bu kadar.	B: Hayır yansıtmadım.	O: Hayır. Bu şekilde olmadı. Burada sadece biz dörtgeni yansıtmış olduk. Orada verilen ifade sadece çizgilerden oluştuğu için içi boş olan bir dörtgeni yansıtmış olduk.	M: ABCD noktaları olarak belirttiğim noktaları yansıttım.
		A: Bunun haricinde başka bir nokta yansıttınız mı?	A: Bu noktalardan başka bir nokta yansıttığınızı düşünüyor musunuz?
		O: Köşeleri, kenar uzunluklarını yansıttım. Bu kadar.	M: Sadece noktaları yansıttım, sonra kenarları birleştirdim.

Dört öğretmenin açıklamaları gösteriyor ki yansıma dönüşümünü uygularken yansımanın tanım kümesini sadece verilen şeklin köşe noktaları ve kenarları olarak düşünmüşlerdir. Öğretmenlerin düzlemdeki bütün noktalar yerine sadece verilen noktalara veya şekillere yansıma dönüşümü uygulamaları, sahip oldukları yansıma dönüşümü ve düzlem tanımlarından kaynaklanıyor olabilir. Görüşmeye başlamadan önce, dört öğretmenden de yansıma dönüşümünü ve düzlemi yazarak ya da çizerek tanımlamaları istenmiştir. Zeynep, yansıma dönüşümünü “eşit uzaklıktaki ayna görüntüsü”; Betül, “bir görüntünün simetri eksenine göre eşit uzaklıkta oluşan görüntüsü”; Okan, “bir şeklin aynadaki görüntüsü” ve Mehmet, “cismin aynadaki görüntüsü” olarak tanımlamışlardır. Bu tanımlamalardan açıkça görülüyor ki dört öğretmen de şekillerin fiziksel görüntülerini dikkate alarak yansıma dönüşümünü uygulamışlar ve yansıma dönüşümünü matematiksel olarak doğru tanımlayamamışlardır. Diğer yandan Zeynep düzlemi, “3 boyut”; Betül, “Tüm cisimleri içine alan boşluk”; Okan, “İçinde yaşadığımız 3 boyutlu boşluk” ve Mehmet, “Eni ve boyu olan sonsuza açılan şekil” olarak tanımlamışlardır. Düzlemin sonsuz noktadan oluştuğunun bilinmemesi ya da bu tanımın yansıma dönüşümünde kullanılmaması yansıma dönüşümünü anlamada kavram yanılgılarına neden

olduğu çıkarımı yapılabilir. Birinci görüşmenin sonunda dört öğretmen de yansıma dönüşümünün tanım kümesini anlamada hareket perspektifine sahiptir.

Yansıma dönüşümü tanım kümesinin verilen şekil ve noktalar dışında şeklin iç ve dış noktaları olarak anlaşılması

Birinci görüşmede, sadece verilen şeklin dışında, şeklin içindeki ve dışındaki noktaları da düşünerek yansıma dönüşümünü uygulayabilmeleri için bir dörtgen ve dörtgenin içinde ve dışında birer nokta işaretlenerek verilmiştir (Bkz. Şekil 5).



Şekil 5. Birinci görüşme örnek yansıma dönüşümü

Dört öğretmen de dörtgenin önce köşe noktalarının yansımalarını alarak ve birleştirerek dörtgenin yansımalarını ifade etmişlerdir. Daha sonra dörtgenin içindeki ve dışındaki birer noktayı yansıtarak yansıma dönüşümünü tamamlamışlardır. “Yansıma dönüşümünü yaparken düzlem üzerinde neyi yansıtın?” sorusuna, Mehmet dışındaki üç öğretmen de “dörtgeni, dörtgenin içindeki ve dışındaki birer nokta dışında hiçbir şey yansıtmadıklarını” söylemişlerdir. Mehmet ise düşüncelerini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

M: Düzlem üzerinde yine şeklin köşe noktalarını yansımalarını aldım birleştirdim, sonrasında G noktasını, sonra I ve H noktalarını yansıtım.

A: Bunlar haricinde [dörtgen, I, H ve G noktaları] başka bir şey yansıtınız mı?

M: Bunlar dışında noktaları [AB, BC, CD, AD] doğru parçaları üzerindeki noktalar yansıtım, dolayısıyla dörtgeni yansıtımış oldum.

A: Yani sadece dörtgene ait noktaları mı yansıtımış oldunuz?

M: Hayır H ve I noktasını da gördüğümüz zaman, bunlar dörtgene ait değil yani doğrunun bir bölgesinde olan tüm noktaları yansıtıp, buluşturdum.

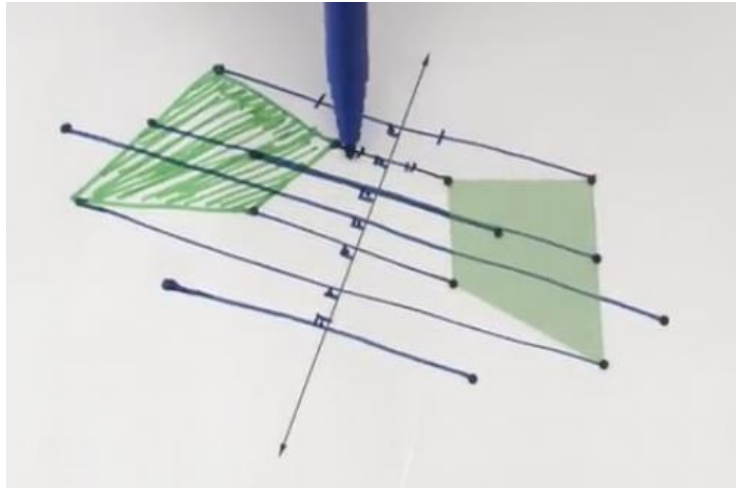
A: Birinci bölgede [Simetri ekseninin sol tarafı] başka bir nokta yansıtınız mı?

M: Noktalar eni ve boyu olmayan düzgün şekillerdir. Yani sonsuz tane nokta vardır aslında bakarsan, biz burada bunların (belirttiğimiz noktalar) var olduğunu kabul ederek karşı tarafa yansıtıyoruz, aslında biz düzlem parçasını [Simetri ekseninin sol tarafı] komple yansıtıyoruz. O şekilde bakıyorum ben. Yani burada gözükmeyen de bir sürü nokta var, gözükkenleri yansıtık ama gözükmeyenler de yansır.

Mehmet'in açıklamaları gösteriyor ki, dörtgenin içinde ve dışında verilen noktalar Mehmet'in düzlemin sonsuz noktalardan oluştuğunu hatırlamasına ve bu tanımı yansıma dönüşümünde uygulamasına neden olmuştur. Yani dörtgenin içinde ve dışında verilen noktalar Mehmet'in yansıma

de uygulamasına neden olmuştur. Zeynep, Betül ve Okan yansıma dönüşümünü sadece verilen açık şekle ve noktalara uygularken, Mehmet simetri ekseninin sol tarafındaki düzlemin tamamına uygulamıştır. Mehmet yansıma dönüşümünü simetri ekseninin solundaki düzlemsel bölgeye uygulamaya devam etmesine rağmen, dört öğretmen de halen yansıma dönüşümü tanım kümesi eylem zihinsel yapısına sahiptir. Çünkü simetri ekseninin solundaki düzlemsel bölgenin sağa, sağdaki düzlemsel bölgenin sola yansıtılması gerektiğini düşünmeye başlamamışlar ve belirtmemişlerdir.

Üçüncü görüşmede, kapalı ya da açık şekil yerine öğretmenlere düzlemi daha somut şekilde düşünmelerini sağlayacak biçimde içi taralı olan bir dörtgen, dörtgenin içinde ve dışındaki bölgelerde bulunan noktalar verilmiştir. Öğretmenlerden yansıma dönüşümünü uygulamaları istenmiştir (Bkz. Şekil 7)



Şekil 7. Üçüncü görüşme örneği yansıma dönüşümü

Dört öğretmen de dörtgenin önce köşe noktalarının yansımasını alarak ve birleştirerek dörtgenin alanını belirlemiştir ve alanın renklendirmesini de yaparak şekli; daha sonra verilen noktaların yansımasını alarak yansıma dönüşümünü tamamlamışlardır. “Yansıma dönüşümünü yaparken düzlem üzerinde neyi yansıttın?” sorusuna, Okan ve Betül “Dörtgensel bölgeyi ve verilen diğer noktaları yansıttıklarını” verirken, Zeynep “noktaları yansıttım, noktalar kümesini, bu noktalar kümesi aslında şekli oluşturuyor bir dörtgen şekli vardı” yanıtlarını vermişlerdir. Mehmet ise “bütün noktaları, doğrunun bir tarafında görünen ya da görünmeyen tüm noktaları taşıdığını, başka nokta taşımadığını” şeklinde yanıt vermiştir.

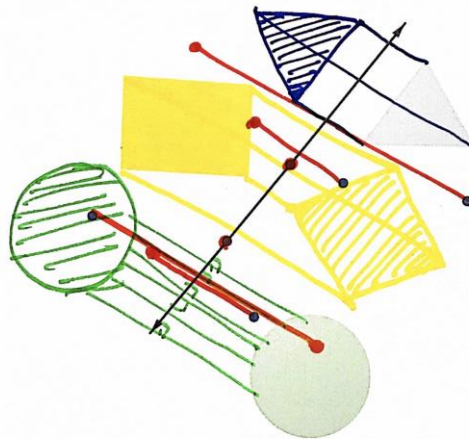
Bunun yanı sıra öğretmenlere düzlem tanımını hatırlamalarını ve yorumlamalarını sağlamak amacıyla Şekil 5 ve Şekil 7’deki dörtgenler arasında yansıma dönüşümü uygularken herhangi bir fark olup olmadığı, olduyorsa bu farkın ne olduğunu sorgulatan bir soru yöneltilmiştir. Zeynep’ in bu soruya yanıtı “dörtgenin içindeki sonsuz doğru parçalarını yansıttım şekil 8’de. Şekil 6’de sadece dört tane doğru parçası (şeklin kenarları) yansıttım”; Betül’ ün yanıtı “ikisinde de ben fark varmış gibi düşünerek yansıtmadım ama birisi yüzey olduğu için yüzey gösterdim sadece, yani yeşil bir yüzey vermişsiniz ben de o yüzeyi doldurdum”; Okan’ ın yanıtı ise “Şekil 6’da sadece sınırların yansımasını yapmıştım.

Burada ise içindeki taralı bölgeyi de yansıtmış oldum.” şeklinde olmuştur. Üç öğretmenin verdiği cevaplar doğrultusunda, öğretmenler düzlemi boş olarak düşünmektedirler. Aynı zamanda öğretmenler şekil yerine nokta yansıttıklarının henüz farkında değildirler. Bu durum da öğretmenlerin düzlem tanımını hala hatırlamadıklarının ve tanımı yansıma dönüşümünde kullanamadıklarının bir göstergesidir. Diğer yandan Mehmet'in yanıtı ise “fark eden bir şey yok, her seferinde nokta yansıtıyoruz” şeklinde olmuştur. Mehmet düzlemin noktalardan oluştuğunu, boş olmadığını ve yansıma dönüşümü uygularken şekil yerine nokta yansıttığının farkındadır.

Öğretmenlerin yanıtları gösteriyor ki, üç öğretmen (Zeynep, Betül ve Okan) hala sadece verilen şekle ve noktalara yansıma dönüşümünü uyguladıklarını belirtirken, Mehmet yalnızca simetri ekseninin sol tarafındaki düzleme yansıma dönüşümü uyguladığını ifade etmiştir. Dolayısıyla dört öğretmen de hala yansımanın tanım kümesi eylem zihinsel yapısına sahiptir.

Yansıma Dönüşümü Tanım Kümesinin Düzlemdeki Bütün Noktalar Olarak Anlaşılması

Öğretmenler ile yapılan üç görüşmenin sonunda üç öğretmenin yansımanın tanım kümesini anlamada eylem zihinsel yapısına sahip olduğu, bir öğretmenin ise yansımanın tanım kümesini anlamada süreç zihinsel yapısına geçiş yaptığı saptanmıştır. Yani üç öğretmen yansıma dönüşümünü uygularken verilen şekle ve noktalara uygulayarak şeklin içini ve dışını boş olarak düşünmüşlerdir. Bir öğretmen ise düzlemin sonsuz noktalardan oluştuğunu, yansıma dönüşümünü yalnızca kendilerine verilen şekle ya da noktalara değil düzlemin tamamına uygulaması gerektiğini düşünmektedir. Örneğin, üçüncü görüşmede öğretmenlere yöneltilen sorulardan birisi de öğretmenlerin yansıma dönüşümünü uygularken düzlem üzerinde bulunan tüm noktaları düşünerek yansıma dönüşümünü uygulayabilmeleri için simetri ekseninin sağında ve solunda bulunan şekiller ve noktalar verilmiştir ve öğretmenlerden yansıma dönüşümü uygulamaları istenmiştir (Bkz. Şekil 8).



Şekil 8. Üçüncü görüşme örnek yansıma dönüşümü

Dört öğretmen de şekillerin köşe noktalarını seçerek simetri eksenine göre şekillerin yansımalarını almışlardır. Daha sonra noktaları birleştirerek ve çokgensel bölgelerin renklendirmelerini yaparak şekillerin yansıma dönüşümünü tamamlamışlardır. Son olarak verilen noktaların da simetri eksenine göre yansımalarını alarak yansıma dönüşümünü tamamlamışlardır. Yansıma dönüşümünü yaparken düzlem üzerinde neyi yansıttın sorusuna, öğretmenlerin cevapları aşağıdaki gibi olmuştur (Bkz. Tablo 5).

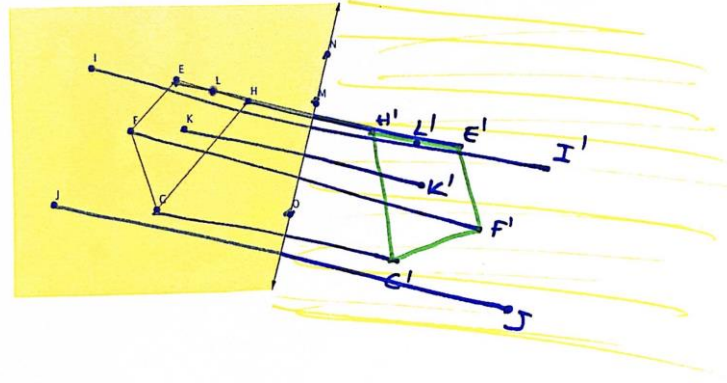
Tablo 5. Katılımcı Cevapları

Zeynep	Betül	Okan	Mehmet
A: Verilen şekli yansıtırken, düzlem üzerinde neyi yansıttınız?	A: Verilen şekli yansıtırken düzlem üzerinde neyi yansıttınız?	A: Verilen şekli yansıtırken, düzlem üzerinde neyi yansıttınız?	A: Verilen şekli yansıtırken, düzlem üzerinde neyi yansıttınız?
Z: Verilen şekilleri, noktaları ve eksen üzerindeki noktaları yansıttım.	B: Şekilleri oluşturan noktalar kümesini yansıttım.	O: Bu sefer bir dairesel, üçgensel ve dikdörtgensel bölgeyi yansıttım.	M: Nokta yansıttım yine.
A: Bunun dışında başka herhangi bir nokta yansıttınız mı?	A: Bunun dışında herhangi bir şey yansıttınız mı?	A: Bölge derken neden bahsediyorsunuz?	A: hangi noktaları?
Z: Hayır yansıttım.	B: Hayır yansıttım.	O: İçini kastediyorum. İçindeki bütün	M: Gözüken ve gözükmeyen tüm noktaları yansıttım. Sadece taşıdığım noktaları boyadım. Belirginleştirilmiş, şekiller karşı tarafta da görüntü olarak belirginleşmiş oldu. Aslında diğer sorularda da şimdi şeklin ya da ayna

noktalardan bahsediyorum. doğrusunun her iki tarafındaki noktaları taşıdığımızı fark ettim. A: Bunun dışında herhangi bir nokta yansıtınız mı? Diğer tarafta belirginleştirilmiş bir şekil O: Noktalar var eksen olmadığı için sanki üzerinde extra o taşınmamış ya da noktaları yansıtmış yansımamış gibi oldum. görünüyordu ama. Doğru! Aslında ayna doğrusunun her iki tarafındaki tüm noktaları karşı tarafa taşımış oluyorum. A: Bunun dışında herhangi bir nokta yansıtınız mı? M: Bunların dışında başka bir şey hayır yansıtmadım.

Öğretmenlerin açıklamaları gösteriyor ki, üç öğretmen (Zeynep, Betül ve Okan) yansıma dönüşümü uygularken yalnızca kendilerine verilen şekillere ve noktalara yansıma dönüşümü uyguladıklarını söyleyerek yansımanın tanım kümesini verilen şekil veya noktalar olarak düşünmüşlerdir. Öğretmenler düzlemin sonsuz noktalardan oluştuğu tanımı hatırlayamadıkları ya da kavram yanılırları yaşadıkları için düzlemin tanımını yansıma dönüşümünde uygulamamışlardır. Diğer yandan Mehmet'in açıklamaları gösteriyor ki üçüncü görüşmede, düzlemin sonsuz noktadan oluştuğunu hatırlamasına, bu tanımı yansıma dönüşümünde uygulamasına neden olmuştur. Mehmet önceki görüşmelerde düzlemin sonsuz noktalardan oluştuğunu belirterek bu tanımı yansıma dönüşümünde kullanamamasına rağmen, üçüncü görüşmede kendisine yöneltilen soru ile birlikte düzlem tanımını doğru şekilde yansıma dönüşümüne uygulayabilmiştir. Yani simetri ekseninin sağında ve solunda bulunan şekiller ve noktalar, yansıma dönüşümünü uygularken düzlemi oluşturan noktaların tamamına yansıma dönüşümü uygulamasını sağlamıştır. Sonuç olarak Mehmet haricindeki üç öğretmen hala yansımanın tanım kümesi eylem zihinsel yapısına sahip iken, Mehmet yansımanın tanım kümesi süreç zihinsel yapısına geçişi sağlamıştır.

Üçüncü görüşme sırasında öğretmenlere yöneltilen sorulardan birisi de, öğretmenlerin düzlem tanımını hatırlayarak, bu tanımı yansıma dönüşümüne uygulayabilmeleri için verilmiş sarı renkli düzlem, düzlem üzerinde verilen yamuk ve noktalardır (Bkz. Şekil 9)



Şekil 9. Üçüncü görüşme örnek yansıma dönüşümü

Üç öğretmen (Betül, Okan ve Mehmet) öncelikle sarı renkli düzlemin simetri eksenine göre yansımasını, daha sonra da düzlem üzerinde verilen şeklin ve noktaların simetri eksenine göre yansımasını alarak yansıma dönüşümünü tamamlamışlardır. Zeynep ise yalnızca sarı renkli düzlemin simetri eksenine göre yansımasını aldıktan sonra şekillerin ve noktaların yansımalarını almadan yansıma dönüşümünü tamamlamıştır. Yansıma dönüşümünü yaparken düzlem üzerinde neyi yansıttın sorusuna, öğretmenlerin yanıtları aşağıdaki gibi olmuştur (Bkz. Tablo 6).

Tablo 6. Katılımcı Cevapları

Zeynep	Betül	Okan	Mehmet
Z: Dört tane noktayı (sarı renkli düzlemi, düzlem olarak değil şekil olarak algılıyor ve köşe noktalarından bahsediyor) yansıttım önce. Yani tüm noktalar kümesini yansıttım.	B: Düzlem (sarı renkli düzlemden bahsediyor) sonsuz noktadan oluşuyor, hepsini yansıtamayacağım için kendime belirlediğim noktaları yansıtarak tamamladım.	O: Oradaki düzlemi yansıttım. Dörtgeni ve noktaları yansıttım.	M: Ayna doğrusunun sağ ve solundaki bütün noktaları yansıtmış oldum.
A: Bunun dışında herhangi bir şey yansıttınız mı?	A: Bunun dışında herhangi bir şey yansıttınız mı?	A: Hangi düzlemden ve noktalardan bahsediyorsunuz?	A: Bunun dışında herhangi bir nokta yansıttınız mı?
Z: Hayır yansıtmadım.	B: Hayır yansıtmadım.	O: Sarı renkli düzlem ve bana verilen noktalar bir de dörtgen yansıttınız mı?	M: Bunların dışında başka bir şey hayır yansıtmadım. Bir de ayna doğrusu üzerindeki noktaları yansıtmış oldum.
		A: Bunun dışında herhangi bir şey yansıttınız mı?	A: Yansıma çizgisinin sağında bir şey var mı?
		O: Hayır yansıtmadım.	M: Sağında görünmeyen noktalar var. Yansıma esnasında onlar da karşı tarafa görünmez nokta olarak taşındı.
		A: Yansıma çizgisinin sağında bir şey var mı?	
		O: Yansıma çizgisinin sağında herhangi bir şey yoktu.	

Öğretmenlerin yanıtları incelendiğinde, Zeynep' in düzlemin matematiksel tanımını hatırlamadığı ya da bilmediği çıkarımı yapılabilir. Dolayısıyla verdiği yanıtlar doğrultusunda Zeynep' in yansıma dönüşümü uygularken sarı renkli düzlemi düzlem olarak değil, bir şekil olarak gördüğü ve bu şekilde yansıma dönüşümü uyguladığı görülmüştür. Zeynep hala düzlemi boş olarak düşünmektedir. Betül yansıma dönüşümü uyguladığı sarı renkli düzlemin sonsuz noktalardan oluştuğunu ifade ederek

düzlemin tanımını hatırlamaya başlamıştır. Yansıma dönüşümü uygularken, bu noktaların hepsini tek tek yansıtamayacağını düşündüğü için sadece belirlediği noktaları yansıttığını ve bu noktalardan hariç başka bir şey yansıtmadığını ifade etmiştir. Betül düzlem tanımını hatırlamasına rağmen, bu tanıma yansıma dönüşümünde uygulayamamıştır. Okan ise bu soruda yansıma dönüşümü uygularken sarı renkli düzlemin tamamını, kendisine verilen dörtgeni ve noktaları yansıttığını ifade etmiştir. Bu sayede düzlemin tanımını hatırlamaya başlamıştır. Fakat simetri ekseninin sağında bir şey olmadığını düşünmüştür ve ifade etmiştir. Üç öğretmenin de yanıtlarından açıkça görülüyor ki, öğretmenler hala yansımanın tanım kümesi eylem zihinsel yapısına sahiptirler. Diğer yandan, Mehmet'in simetri ekseninin sağında ve solunda sonsuz tane nokta bulunduğunu, yansıma dönüşümü uygularken düzlem üzerindeki bütün noktaların simetri ekseninin sağına ve soluna karşılıklı olarak yansıması gerektiğini belirterek yansıma dönüşümünü tamamlaması kendisinin yansımanın tanım kümesi süreç zihinsel yapısında olduğunu 1 kez daha göstermiştir.

Üçüncü görüşmenin sonunda öğretmenlerden yansıma dönüşümünü tekrar tanımlamaları istenildiğinde, Zeynep "nokta ve noktalar kümesinin simetri eksenine olan uzaklığını, simetri ekseninin diğer tarafına çizmektir"; Betül "Bir şeklin görüntüsünün simetri eksenine göre eşit uzaklıktaki görüntüsü"; Okan 'şu ana kadar hep doğru ile çalıştığımız için o doğruyu ayna olarak kabul edip, onun karşısında ve terse bakacak şekilde oluşan cisimler' ve Mehmet ise "Ayna doğrusunun sağında ve solunda bulunan bütün noktaları karşı tarafa taşıma işlemi" olarak tanımlamışlardır. Öğretmenlerin yaptıkları son tanımlardan görüleceği gibi Zeynep, Betül ve Okan şekillerin fiziksel görüntülerini göz önünde bulundurarak yansıma dönüşümü yaptıkları, düzlemi göz önünde bulundurmadıkları bu yüzden de düzlemi boş olarak düşündükleri çıkarımı yapılabilir. Düzlemin sonsuz noktadan oluştuğunu ifade edemedikleri için, bu tanıma yansıma dönüşümünde de kullanamamışlardır. Dolayısıyla üç öğretmen de yansımanın tanım kümesi eylem zihinsel yapısına sahip oldukları ortaya çıkarılmıştır ve görüşmeler süresince hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine herhangi bir geçiş gösterememişlerdir. Mehmet' in son yansıma dönüşümü tanımı incelendiğinde ise, ilk görüşmede yaptığı tanıma göre değişiklik olduğu görülmüştür. Mehmet ilk tanımında yansıma dönüşümünü 'cismin aynadaki görüntüsü' olarak belirttiği için yansıma dönüşümü uygularken düzlemi göz önünde bulundurmadığı, sadece verilen şekli ve noktaları yansıttığını ifade etmiştir. Son tanımında ise yansıma dönüşümü uygularken düzlemin sonsuz noktalardan oluştuğunu ve yansımayı simetri ekseninin sağında ve solunda bulunan tüm düzleme uygulaması gerektiğini ifade etmiştir. Dolayısıyla Mehmet'in yansımanın tanım kümesi eylem zihinsel yapısından süreç zihinsel yapısına geçiş yaptığı açıkça görülmektedir. Sonuç olarak dört öğretmen arasından sadece Mehmet hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş sağlamıştır.

Üç öğretmenin (Zeynep, Betül ve Okan) hareket perspektifinde kalma nedenleri incelendiğinde düzlem tanımının matematiksel olarak bilinmemesi ve bu tanımın yansıma dönüşümü içerisinde

kullanılmaması gösterilebilir. Mehmet'in hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçişinde ise düzlem tanımını hatırlatacak görüşme sorularının hazırlanması (kapalı şekil, açık şekil, şeklin içinde ve dışında verilen noktalar ve simetri ekseninin her iki tarafında şekil ve noktalar verilmesi veya bölgenin taralı olması) ve süreçte sorulan açık uçlu soruların etkisi Mehmet'in yansıma dönüşümünü sadece verilen şekil veya noktalara değil düzlemdeki bütün noktalara uygulaması gerektiğini anlamada yardımcı olmuştur.

Tartışma ve Yorum

Bu çalışmada şu araştırma sorularına cevap aranmıştır: "Lise matematik öğretmenleri yansıma dönüşümünün tanım kümesi alt konseptini anlamada hangi perspektife sahiptirler?", "Lise matematik öğretmenlerinin hareket veya eşleştirme perspektifine sahip olmalarının nedenleri nelerdir?" Dört öğretmen ile yapılan ilk görüşmede, dört öğretmenin de yansımanın tanım kümesini anlamada eylem zihinsel yapısına sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Yani dört öğretmen de yansımanın tanım kümesini anlamada hareket perspektifine sahiptirler. Dört öğretmen de yansımanın tanım kümesini verilen şekil ve/veya noktalar olarak düşünerek yansıma dönüşümünü uygulamışlardır. Öğretmenlerin yansıma dönüşümünü düzlemdeki tüm noktalara değil de sadece verilen şekil veya noktalara uygulamalarının bir nedeni, düzlemin matematiksel tanımının yanlış bilinmesi (düzlemi boş olarak düşünmek) ya da düzlem tanımının (düzlemin sonsuz noktalardan oluşması) yansıma dönüşümünde kavramsal olarak kullanılmaması olabilir (Hollebrands, 2003; Yanık, 2006).

Dört öğretmen ile yapılan üç görüşmeden sonra Mehmet yansıma dönüşümünün tanım kümesini anlamada süreç zihinsel yapısına sahip olurken diğer üç öğretmen eylem zihinsel yapısında kalmışlardır. Yani Mehmet yansıma dönüşümünü anlamada hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçerken, diğer üç öğretmen hareket perspektifinde kalmışlardır. Zeynep, Betül ve Okan'ın hareket perspektifinde kalma nedenlerinden biri, daha önce yansıma dönüşümü konusunu öğrenirken düzlemdeki bütün noktalara yansıma dönüşümünü uygulamaları gerektiğini öğrenmemiş ya da hiç bu şekilde deneyimlememiş olmalarından kaynaklanıyor olabilir (Akarsu, 2018; Edwards, 2003; Yanık ve Flores, 2009). Bütün görüşmeler boyunca verilen farklı şekillere rağmen düzlemdeki bütün noktalara yansıma dönüşümünü uygulamaları Zeynep, Betül ve Okan için zor ve yeni bir konsept olarak gelmiş olabilir (Hollebrands, 2003; Yanık, 2006)

Üç öğretmenin de yansıma dönüşümünü sadece verilen noktalara ve şekillere uygulama nedenlerinden biride yansıma dönüşümü konusunun kitaplardaki anlatım şekli olabilir (Jones, 2004; Zorin, 2011). Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) ders kitapları incelendiğinde, kitaplardaki konu anlatımı ve örneklerin sadece verilen noktalara ve şekillere yansıma dönüşümü uygulanması gerektiğine yönelik olduğu bulunmuştur. Diğer bir ifadeyle, ders kitaplarının yansıma dönüşümünün alt konsepti olan tanım kümesini anlamada hareket perspektifine yönelik olarak yazıldığıdır. Örneğin sekizinci sınıf ders kitabında yansıma dönüşümü, "bir şeklin doğruya göre yansıması" olarak ifade edilmiştir. 12. sınıfta

ise yansıma dönüşümü, “bir şeklin bir noktaya veya bir doğruya göre simetriğinin alınması” olarak tanımlanmıştır. Bu tanımlar incelendiğinde düzlemdeki bütün noktaların yansımalarının yapılması yerine, sadece verilen şekil veya noktalara yansıma dönüşümünün uygulanması gerektiğini belirtmektedir. Bu bir kavram yanılgısıdır ve kitapların eşleştirme perspektifine göre düzenlenmesi gerekmektedir.

Mehmet için dörtgenin içinde ve dışında verilen noktalar düzlemin matematiksel tanımını hatırlamasına yardımcı olarak yansıma dönüşümünde kullanmasına yardımcı olmuştur. Mehmet’deki bu gelişimin nedeni görüşmelerde verilen yansıtılacak şekillerin farklılığından kaynaklanıyor olabilir. Yani, Mehmet daha önce yansıma dönüşümü uygularken düzlemde sonsuz noktalardan bağımsız sadece şekil verilerek öğrenmesinden kaynaklı olabilir (Akarsu, 2018). Mehmet’deki diğer bir gelişim ise simetri ekseninin her iki tarafında verilen şekil ve noktalardan dolayı yansıma dönüşümünü sadece verilen şeklin olduğu yarı düzleme değil, simetrik ekseninin her iki tarafındaki sonsuz noktaya uygulanması gerektiğini düşünmeye başlamasıdır. Sonuç olarak, yansıma dönüşümünde yansıtılacak şeklin çeşitliliği düzlemdeki sonsuz noktanın yansıtılması gerektiğini hatırlamada ya da öğrenmede önemli bir etkidir (Akarsu, 2022).

Sınırlılık

Bu çalışmanın üç sınırlılığı bulunmaktadır. Birinci sınırlama çalışmanın örnekleminin dört katılımcı ile sınırlı kalmasıdır. Çalışmanın yönteminde örneklem seçiminde kolay ulaşılabilir durum örnekleme kullanılması gereğiyle kısa zaman içerisinde konu hakkında doğru bilgiler aktarabilecek katılımcılara ulaşılmaya çalışılmıştır ve dört katılımcı ile çalışmanın sürdürülmesine karar verilmiştir. Daha geniş bir örneklem seçimi ile çalışmanın bulgularının farklı yönde olabileceği göz önünde bulundurulmalıdır. İkinci sınırlama, çalışmaya katılan öğretmenlerin görev kademelerinin lise matematik öğretmenleri olmaları ile sınırlı tutulmasıdır. Ortaöğretim kademesinde eğitim veren öğretmenlerin fonksiyon, yansıma, küme, nokta, düzlem gibi konuları ve kavramları derslerinde ilköğretim kademesine göre daha sık kullandıkları için, görüşmeler süresince daha verimli tecrübe paylaşımı yapacakları düşünülmüştür. Aynı zamanda çalışmaya katılan öğretmenlerle gerçekleştirilecek olan görüşmeler sürecinde öğretmenlerin çalışma takvimlerine uyan bir program yapılması gerektiğinden yalnızca lise matematik öğretmenleri ile çalışılmasına karar verilmiştir. Üçüncü sınırlama ise, toplanan verilerin yalnızca sözlü değil, aynı zamanda sözel olmayan davranışlardan, kendine özgü konuşma özelliklerinden, jestlerden ve ifadelerden oluşmasıdır. Görüşmeler sırasında katılımcıların düşüncelerini tam olarak ifade edememiş olmaları göz önünde bulundurularak, araştırmacılar katılımcıların beden dilleri, kullandıkları ifade biçimlerinden çıkarım yapılmıştır.

Öneriler

Bu çalışmada öğretmenlerin yansıma dönüşümünde yansımanın tanım kümesinde sahip oldukları perspektifleri ortaya çıkarılarak, hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş süreçleri incelenmiş ve bu doğrultuda öğretmenlerle gerekli görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bir sonraki çalışmada, öğretmenlerin simetri eksen ve düzlem alt konseptlerinde sahip oldukları perspektifler ortaya çıkarılarak, hareket perspektifinden eşleştirme perspektifine geçiş süreçleri incelenebilir.



<http://kefad.ahievran.edu.tr>

Ahi Evran University
Journal of Kırşehir Education Faculty

ISSN: 2147 - 1037

ENGLISH VERSION

Introduction

According to recent studies and published reports, it is essential to teach the subject of geometric reflection in primary, secondary, and high schools (Ada and Kurtuluş, 2010; Akarsu, 2018; Hollebrands, 2003; Knuchel, 2004; Ministry of Education [MEB], 2010; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Because the subject of geometric reflection is substantial to understand the role of mathematics in everyday life (Hollebrands, 2003; Yanık, 2014), to learn certain mathematical topics (e.g. function, parity, and similarity, symmetry) conceptually (Akarsu; 2022; Flanagan, 2001), to enable students to discover patterns and make interpretations, to gain spatial ability (Yanık, 2011), to analyze mathematical problems (Aktas and Ünlü, 2017) and to conceptually learn the definitions of point, line segment, plane, domain, etc. (Akarsu, 2018).

In the studies conducted on geometric reflection, it has been discovered that teacher candidates have difficulties understanding the concept of reflection transformation (Akarsu, 2018; Son and Sinclair, 2010; Yanık, 2006). Mathematically defining geometric reflection (Desmond, 1997; Hacısalihoğlu Karadeniz, Baran, Bozkuş and Gündüz, 2015; MhLolo and Schafer, 2014), using the properties of equal distance and perpendicularity of the axis of symmetry when taking a reflection of a given shape (Akarsu, 2018; Hacısalihoğlu Karadeniz et al., 2015; Harper, 2002; Yanık, 2006), mathematically explaining and using the domain of geometric reflection (Akarsu, 2018; Yanık, 2006), being able to move a shape by thinking about the figure or point independently of the plane (Akarsu, 2018; Harper, 2002; Yanık, 2006), being able to define a plane mathematically and using this definition in reflection transformation are such difficulties (Akarsu, 2018; Harper, 2002; Yanık, 2006).

As a result of these studies, it was emphasized that there are two critical perspectives in conceptually understanding geometric reflection: motion and mapping perspective (Hollebrands, 2003; Yanık, 2006). According to the perspectives of motion and mapping, the reflection domain has an essential role in the conceptual understanding of geometric reflection (Akarsu, 2018; Flanagan, 2001; Yanık, 2006). In literature, it is emphasized that teacher candidates have a perspective of motion in understanding the sub-concept of the domain of reflection (Akarsu, 2022; Yanık, 2006). Understanding the domain of geometric reflection as a perspective of motion is mathematically a misconception (Flanagan, 2001; Yanık, 2006). Therefore, it is essential to have a mapping perspective in the conceptual understanding of geometric reflections.

When definitions related to geometric reflection are examined, it is seen that there are definitions given for the perspective of motion (Demir and Kurtuluş, 2019; Köse, 2012). One of the definitions for the geometric reflection based on the motion perspective can be represented as the movement of a given shape relative to the axis of symmetry and obtaining an inverted image that is relative to the shape's initial state. On the other hand, in the literature, geometric reflection based on the perspective of mapping is defined as an injective and surjective function that transforms all points

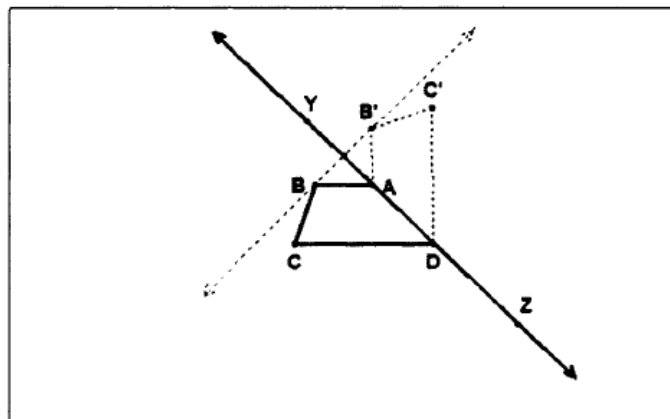
located on the plane into points on the same plane while maintaining the properties of equal distance and perpendicularity. (Coxford, 1973; Martin, 1982; Zembat, 2007). When definitions given for motion and mapping perspectives are examined, the definitions of the motion perspective contain expressions such as “the movement of shapes on the plane”, “the inversion of shapes”, which can lead to misconceptions about geometric reflection. In contrast, the mapping perspective is defined as an injective and surjective projection points, instead of the mutual movement of all points on the plane.

Although previous studies have focused on explaining the difficulties of pre-service mathematics teachers understanding of geometric reflection, no study has examined the improvement in mathematics teachers' understanding of geometric reflection. The purpose of this study is to examine which perspective mathematics teachers have in understanding the domain of geometric reflection according to the sub-concept, and to reveal how the transition process should be from the motion perspective to the mapping perspective, if they have the perspective of motion.

Pre-Service Teachers' Understanding of the Sub-concept of Domain of Geometric Reflection Based on Motion and Mapping Perspectives

Since no studies have been conducted on mathematics teachers' understanding of geometric reflection, their understanding will be interpreted by making inferences from the studies conducted with pre-service teachers.

Studies conducted in this field have shown that pre-service teachers have a perspective of motion in the sub-concept of the domain of geometric reflection (Akarsu, 2018; Harper, 2002; Yanık, 2006). Pre-service teachers with a perspective of motion applied geometric reflection to only the given figure or points instead of all points on the plane. For example, during an interview Yanık (2006) asked one of the pre-service teachers to reflect on an ABCD trapezoid (See. Figure 1). The candidate teacher completed the geometric reflection by selecting only the vertices and edges of the trapezoid. When Yanık asked if he had reflected anything other than the vertices and edges, the candidate teacher answered “no”. The teacher candidate has an understanding of the domain of geometric reflection based on the motion perspective, since he expressed geometric reflection as the reflection of the given shape and the points on that shape, instead of expressing geometric reflection as the reflection of infinite points on the plane.



See Figure 1. A teacher candidate's application of geometric reflection to a trapezoid (p. 98)

In his study conducted with four prospective classroom teachers, Harper (2002) has analyzed the progress of their existing knowledge and developments in geometric reflection in a dynamic geometry software environment (The Geometer's Sketchpad). According to the results obtained from his interviews about geometric reflection, he determined that all four teacher candidates had difficulties expressing the area (domain) they should reflect. When applying geometric reflection, prospective teachers reflected only the given shape, thought about the shape independently of the plane and did not express that they should apply geometric reflection to any other points on the plane. Since they reflect only the given shape, instead of reflecting all the points on the plane when applying the geometric reflection, all four prospective teachers have the perspective of motion of the domain of geometric reflection.

By conducting interviews, Akarsu (2018) examined four mathematics teacher candidates' understanding of geometric reflection according to the motion and mapping perspectives. At the first interview, all four prospective teachers have the perspective of motion in understanding the domain of geometric reflection. At the end of the fourth interview, all four prospective teachers understood the domain of geometric reflection based on the mapping perspective. In these interviews, the shapes that were given to be reflected, the circle, the open shape, the points given inside and outside the shape, and the shapes and points on both sides of the symmetry axis, helped prospective teachers to understand that they should apply the geometric reflection not only to the given shape or points, but to all points in the plane. For example, in the second interview, the teacher candidate was given a circle and asked to apply geometric reflection to that circle (See Figure 2). The candidate teacher completed the geometric reflection by determining several points on the circle, taking its reflection relative to the axis of symmetry and connecting the points. When asked, "Did you project another point other than the points on the circle?", the teacher candidate stated that he had also reflected infinite points in the circle,

considering its central point. The center point inside the circle helped the teacher candidate think that infinite points inside the given shapes should also be reflected when applying the geometric reflection.

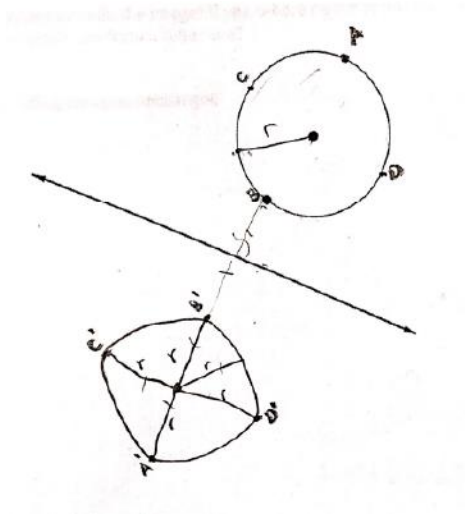
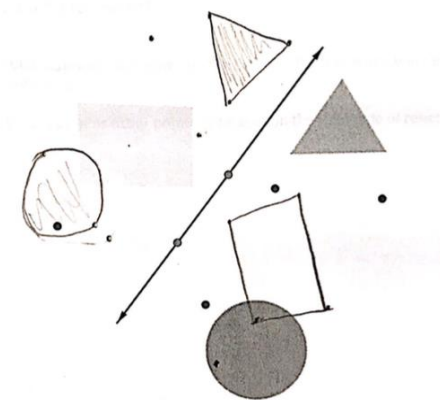


Figure 2. A teacher candidate's application of geometric reflection to a circle (p. 69)

In the fourth interview, Akarsu (2018) asked the teacher candidate to apply geometric reflection to shapes and points located in two opposite regions on the plane (See. Figure 3). The aim here is to make them realize that the half-plane on the left side of the symmetry axis should be projected onto the right side and the half-plane on the right side should be projected onto the left side. In other words, this question was asked to understand that the geometric reflection should be applied to both sides of the symmetry axis. The teacher candidate has completed the geometric reflection of the given shapes and points according to the symmetry axis. When asked, "What points did you reflect on the plane?" he stated that he "reciprocally reflects all the points located on the plane". The shapes and points given in the opposite regions on the plane made the teacher candidate realize that all the points on the plane should be reflected. At the end of the third interview. The candidate teacher's understanding of the domain of geometric reflection switched from the perspective of motion to the perspective of mapping, all with the help of the circle, open shape and mutual shapes on the plane given during the interviews.



See Figure 3. A teacher candidate's application of geometric reflection to shapes and points located in opposite regions on the plane (p. 75)

By conducting interviews, some teacher candidates transitioned from the motion perspective to the mapping perspective on the domain of geometric reflection. In contrast, other teacher candidates still remained in the mapping perspective. In this study, the interview questions developed by the Akarsu (2018) were applied to mathematics teachers to determine their perspectives in understanding geometric reflection, and if they have a motion perspective, the transition from a motion perspective to a mapping perspective was examined with the APOS theory.

APOS Theory

The theory of Action, Process, Object and Schema (APOS) is a model that tries to explain how mathematical concepts are learned in the mental structure (Dubinsky, 1991). The purpose of using APOS theory is to reveal how a mathematical concept is structured in an individual's mind, how an individual understands and expresses that concept. The theory of APOS consists of four structures, and these structures are a model of mental structure called the 'stages'. These mental structures are, respectively, action, process, object and scheme. In this study, the theory of APOS was used to examine teachers' cognitive structures and developments of the domain of geometric reflection (whether they have a motion perspective, a mapping perspective, or their changes during the transition stages from a motion perspective to a mapping perspective).

The meaningfulness of a mathematical concept for an individual is directly proportional to the connections established between mental structures. The established connections form schemes in the minds of individuals, and these schemes help to gain conceptual meaning of mathematical situations (Arnon et al., 2014). As a sub-concept of the domain of geometric reflection, it is enough for teachers to have action and process mental structures to transition from a motion perspective to a mapping perspective (Akarsu, 2018; Yanık, 2006). Therefore, in this study, it will be sufficient to use the mental structures of action and process. The mental structures of the object and scheme will not be used in the study.

The first transformation process, performed to make a mathematical concept meaningful, is the mental action structure. For an individual with a mental action structure, it is impossible to make any transformation of this concept without external help. External aids can be formulas, hints and similar examples related to the concept (Oktaç and Çetin, 2016). Since transformation cannot be done without external help, it is impossible to visualize the applied transformations mentally. Each step has to be performed clearly by the individual implementing the transformation. An individual who has an active mental structure in understanding the domain of geometric reflection, will think that the domain of geometric reflection consists of specified shapes or points, and apply the transformation only to this shape or point. For example, when pre-service teachers are asked to apply geometric reflection to a figure located on a plane, they express that they only reflect the points belonging to the figure.

In mental structure, a mathematical concept will gain meaning as a result of the internalization of an action by constantly repeating it or connecting it with other actions. There is no semantic difference in the mathematical concept of the mental structure of action and the mental structure of the process. An individual in the action mental structure needs constant external cues to carry out the transformation, while an individual in the process mental structure does not need external help. The individual has internalized the action by repeating it. Since he is aware of the transformations he has made, he can visualize it in his mind without the need for formulas or other clues. While individuals have to perform every step in the mental structure of action, they do not have to perform every step in the mental structure of the process (Dubinsky, 1991). An individual who has a process mental structure in understanding the domain of geometric reflection does not think of the domain of geometric reflection as the reflection of only a given shape or point but as a reflection of all points on the plane.

In literature, there are studies where the theory of APOS was used to reveal how pre-service teachers understand geometric transformations and their mental structures (Akarsu, 2018; Yanık, 2006). In his study, Akarsu (2018) revealed how teacher candidates' mental structures in geometric reflection transition from the perspective of motion to the perspective of mapping and which factors are effective during this transformation. There is no study in which teachers' mental structures in geometric reflection are examined using the theory of APOS. This study has revealed how teachers transition from the perspective of motion to the perspective of mapping by determining the perspectives they have in understanding the domain of geometric reflection, using the mental structures of action and process. For this purpose, the answers to the following questions were sought.

- 1- What perspective do high school mathematics teachers have in understanding the sub-concept of the domain of geometric reflection?
- 2- What are the reasons as to why high school mathematics teachers have the perspective of motion or mapping?

Method

Research Design

In this study, one of the qualitative research patterns, the case study pattern, was used due to the need to determine which perspective mathematics teachers have in understanding the sub-concept of the domain of geometric reflections and analyze the transition processes from the motion perspective to the mapping perspective in depth. Case studies are a pattern used to find answers to the 'how' and 'why' questions on the studied subject without the intervention of the researcher (Yıldırım and Şimşek, 2011; Yin, 2009). Every teacher's perspective (motion and mapping perspectives) can vary depending on different parameters such as; the duration of professional experience, skill and knowledge in teacher preparation programs and their teaching strategies of mathematical topics. To identify these differences and to reveal their causes, semi-structured interviews were conducted with mathematics teachers. The

interview is an important data collection tool for revealing individuals' perspectives, feelings, experiences, and thought structures (Merriam, 2013). In this study, interviews with teachers were conducted to reveal how the transition process from a motion perspective to a mapping perspective should be, by determining if teachers understanding of the sub-concept of the domain of geometric reflections is based on the motion perspective or the mapping perspective and explaining the reasons as to why they have these perspectives.

Study Group

In this study, the study group consists of a total of four high school mathematics teachers, who have graduated from different universities, two of whom are women and two of whom are men. All of whom are working in different private schools affiliated to the Ministry of Education in Ankara province. In order to determine the participants of the study, easily accessible case sampling was used to complete the research process quickly and practically (Patton, 1987). The participants were determined by the researchers of the study in order to conduct interviews in a convenient, fast and practical way. The duration of professional experience of mathematics teachers is at least two, at most twenty years. Due to research ethics, the names of the teachers of the study group were kept confidential and were coded as Zeynep, Betül, Okan and Mehmet. Demographic information regarding gender, age and professional experience of the mathematics teachers who make up the study group are given in Table 1.

Table 1. *Demographic characteristics of mathematics teachers*

Participants	Gender	Age	Duration of Professional Experience (year)
Zeynep	F	26	2
Betül	F	33	9
Okan	M	39	16
Mehmet	M	44	20

The participation of the teachers who made up the study group was based entirely on volunteerism. One of the women in the study group started her career after getting an education in pedagogical formation, since she had graduated from the department of mathematics at the faculty of arts and sciences. In contrast, the other female teacher started a postgraduate program, after graduating from the department of mathematics teaching. Still, she dropped out at the end of the first year and started working at a private school as a full-time teacher. One of the male teachers participating in the study graduated from the mathematics department at the faculty of arts and sciences and started working as a mathematics teacher after completing his postgraduate education. The other male teacher, who had graduated from the mathematics department at the faculty of arts and sciences, started his career after completing a pedagogical formation. The gender distribution in the study group was determined independently, without any specific criteria.

Data Collection Tools

In this study, where a qualitative research method was applied, interviews were used as a data collection tool. To be able to uncover the perspectives that mathematics teachers have in understanding the sub-concept of the domain of geometric reflections, to determine the reasons as to why they have these perspectives and which mental structures are formed during the transition from the motion perspective to the mapping perspective, interview questions were created, while taking into account the researcher's doctoral thesis (Akarsu, 2018). The content-scope validity of the interview questions was examined by taking two experts' opinions. The necessary arrangements were made according to the feedback from experts and the interview question were then directed to the four high school mathematics teachers involved in the study. Necessary adjustments were made in line with the feedback from the experts (the order of some questions was changed, some questions were removed). In this study, four semi-structured interviews were created in total, one of which was a personal recognition interview. The remaining three were about geometric reflection. The first interview aimed to define personal information of teachers (e.g., professional experience duration, educational purposes, mathematical background, classroom management, their definitions of concepts about geometric reflection). From the second interview until the end of the fourth interview, questions were prepared in order to reveal the perspectives that teachers have about geometric reflection. The prepared interviews have been created to allow teachers to demonstrate the questions posed by writing or drawing. The sequence of the interview questions is arranged so that the participant sees one question on each page and answers it without seeing other questions, focusing only on that question. Following the purpose of the study, the questions prepared in each interview contain different types of questions that have been carefully created in order to make a comprehensive observation. Examples of the types of questions posed by the researchers to the teachers who made up the study group during the interviews are shown in Table 2.

Table 2: *Sample interview questions directed to mathematics teachers*

Questions for identifying personal information

- Can you tell us a little about yourself? (First name, last name, which school you graduated from, duration of professional experience, subject)
- How did you decide to become a teacher?
- What are your educational goals for yourself and for your students?
- How would you describe yourself as a mathematics teacher? What is your teaching method?
- In a classroom setting, how do you define whether a mathematics topic is understood or not?
- Do you teach geometry? If yes, did you explain geometric reflection in your class? When was the last time you taught that subject? Can you explain your experiences or memories about the subject?
- What do you teach about geometric reflection?
- Can you define geometric reflection, symmetry axis, point, line and space by using your own words or by drawing?
- Can you mention any features about the geometric reflection? Or, if there are, can you explain formulas?

Questions asked to reveal the perspective they have on geometric reflection

- Is this a reflection?
 - Can you find the symmetry axis of the given shapes?
 - Can you define the symmetry axis, point and plane?
 - Can you explain how you do geometric reflection?
 - Can you define geometric reflection?
 - What changes occur when the symmetry axis is shifted downwards or upwards?
 - What information is needed to apply geometric reflection?
 - What did you reflect when you applied geometric reflection?
 - Did you project another point other than these points? If yes, which ones?
-

The Process of Data Collection

During the data collection process, all interviews with teachers were conducted face-to-face, while the Covid 19 pandemic measures were taken into account. To meet each of the teachers, who live in Ankara province, a calendar has been created that matches their schedules. In the implementation process, each of the prepared interviews was applied to teachers on different days. Schools where teachers work, were preferred as a place to conduct the interviews. During the interview process, the permission and consent of the teachers were obtained and an audio recording with an audio recorder and a video recording with a video camera were taken by the researcher. Each interview was conducted in a time frame of at least twenty-five to a maximum of sixty minutes. The frequency of interviews with each teacher was planned and implemented with an interval of no more than four days. A researcher conducted the interviews. During the interview process, the researcher met the participant during the day, presented the interview to the teacher and asked the teacher to answer the directed question and apply drawings if necessary. When the data collection process was completed, the audio and video recordings were transcribed by the study's researchers and made available for the analysis process.

Analysis of the Collected Data

The study's data analysis was carried out by using semi-structured interview documents and video and audio recordings, which were applied during the interviews with the teachers. Audio and video recordings obtained from interviews were saved on a computer using the transcript method. After all the collected data were transcribed, a hypothesis-based coding was planned to be performed on the drawings, verbal responses and statements of the teachers participating in the study. During the coding process, teachers' perspectives, the reasons for having these perspectives, and their progresses in the transition processes from a motion perspective to a mapping perspective were revealed. In the process of data analysis of this study, the mental development processes demonstrated by teachers in the domain of geometric reflection were revealed through encodings, using the action and process mental structures within the scope of APOS theory. In the coding process, separate encodings were made by two researchers in order to access the correct information and to make the correct analyses. The codings were then compared with each other. If there are differences, they are discussed and the final form is given to the codings belonging to the analysis of the data. The sample coding is given in Table 3.

Table 3: *Sample Coding*

Code	Sample participant's answer	Interpretation
-------------	------------------------------------	-----------------------

The domain of reflection
mental structure of action

A: After completing the reflection of the given shape [a line segment, a point on the line segment and a point outside the line segment] and the point, can you explain what it reflects on the plane?

M: When I look at the whole of the figure, I see a line segment and two points. Here, I have reflected the line segment and two points.

A: Have you reflected any other point other than these points?

M: No, I didn't.

According to the teacher's answer, he/she believes that in this question, he/she is reflecting from only one half of the plane (the half plane where the shape and points are located) to the other half. At the same time, the teacher is not aware that the plane consists of infinite points. He/she stated that the domain of geometric reflection consists of only the given figure (line segment) and two points. The teacher here has a mental structure of action of domain of reflections, in other words he/she has the perspective of motion.

The domain of reflection
mental structure of
process

A: After completing the reflection of the given shapes and points [triangular and circular region on the right of the plane, rectangular region on the left of the plane, two points on the axis of symmetry], can you explain what it reflects on the plane?

M: We have recipocally reflected the entire plane. We consider that the reflection occurs only on one side of the plane (meaning half the plane), and that the other half of the plane is empty, but it is not. Both plane parts consist of infinite points, and we would reflect all of these points. We move all the points to the other region.

According to the teacher's answer during the interview, when he/she saw the given shapes on the opposite sides of both half-planes, he/she stated that both parts of the plane consist of infinite points, they should be reflected recipocally on both half-planes. The teacher here has switched to a mental structure of process of domain of reflections, in other words he/she has made a transition to the perspective of mapping.

Ethical Permissions of the Research

In this study, all the rules stated to be followed within the scope of the "Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive" were followed. None of the actions, entitled "Actions Contrary to the Ethics of Scientific Research and Publication", which are specified in the second part of the directive, have been carried out.

Ethics committee permission information:

Name of the board that conducts the ethical evaluation = Ağrı Ibrahim Çeçen University Scientific Research Ethics Committee

Date of the ethical evaluation = 08.09.2021

Ethics evaluation certificate number = 214

Results

Knowing that the domain consists of infinite points in the plane is an essential concept in understanding and applying geometric reflection. As a result of interviews with teachers, three different findings of understanding the geometric reflection have emerged: (1) understanding domain of geometric reflection only as given shapes and points, (2) understanding domain of geometric reflections as inner and outer points of the shape other than the given shapes and points (3) understanding domain of geometric reflection as all points in the plane.

Understanding domain of geometric reflection only as given shapes and points

At the first meeting with teachers, it was revealed that all four teachers have an action mental structure in understanding the domain of geometric reflection. In other words, all four teachers applied the geometric reflections only to the given shape and points and thought of the inside and outside of the shape as hollow. For example, teachers were given an ABCD trapezoid and asked to apply geometric reflection according to the axis of inclined symmetry (See. Figure 4).

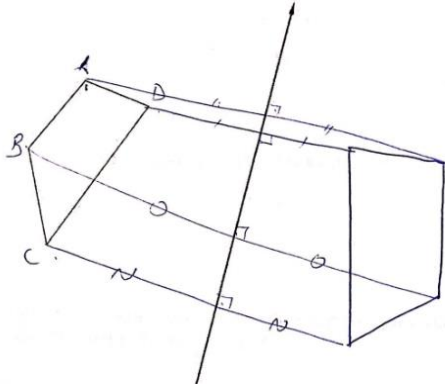


Figure 4. Geometric reflections sample of the first interview

First, all four teachers selected the vertices of the quadrilateral and reflected them relative to the axis of symmetry. Then, by connecting the dots, they completed the geometric reflection. To the question of what you reflected on the plane when doing geometric reflection, the teachers' answers were as followed (See. Table 4).

Table 4: Sample Coding

Zeynep	Betül	Okan	Mehmet
Z: I reflected the rectangle, it is a trapezoid, so I reflected the trapezoid.	B: At first, I found the distances of the vertices of the figure to the axis on the plane, after that I created distances equal to these distances in the other region, later, I combined the edges.	O: When reflecting, we didn't just make a reflection of that rectangle, but we made a reflection of the vertices. We also made reflections of the line segments, in other words, we made reflections of the side lengths of the rectangle on the figure. If the reflection we made was a quadrilateral region, we would also have to make reflections of the points in it.	M: I reflected points on the plane.
A: Have you reflected any other point other than the rectangle?	A: Have you reflected any point other than these points?	A: And did we it for this question?	A: What points did you reflect?
Z: Perpendicular distances, edges, vertices. That's it.	B: No, I didn't.	O: No. It was not done in this figure. Here we have only reflected the rectangle. According to the given statement, it consists of only lines, therefore, we have reflected a rectangle that is hollow.	M: I have reflected the points that I have marked as ABCD points.
		A: Have you reflected any other point besides this?	A: Do you think you reflected any other point other than these points?
		O: I reflected the vertices, the side lengths. That's it.	M: I only reflected the points, then combined the edges.

The explanations of all four teachers show that when applying the geometric reflection, they considered the domain of reflection as the given figure and line segment. When applying the geometric reflection, they thought they had only reflect the vertices and edges of the given figure. The reason as to why they apply geometric reflections only to given points or shapes instead of all points in the plane, may be due to teachers' definitions of geometric reflection and plane. Before starting the interview, all four teachers were asked to describe the geometric reflection and the plane by either writing or drawing. Zeynep defined the geometric reflection as "mirror image at an equal distance"; Betül as "the image formed at an equal distance relative to the axis of symmetry"; Okan as "the image of a shape in a mirror" and Mehmet as "the image of an object in a mirror". These definitions clearly show that all four teachers defined the geometric reflections mathematically incorrect since they applied them by taking into account the physical images of shapes.

On the other hand, Zeynep defined the plane as "3 dimensions"; Betül, as "A space that encloses all bodies"; Okan as "The 3-dimensional space we live in" and Mehmet as "A shape with width and

length, that extends to infinity". It can be inferred that not knowing that the plane consists of infinite points or not using this definition in geometric reflection causes misconceptions in understanding the geometric reflection. At the end of the first interview, all four teachers have a motion perspective in understanding the domain of geometric reflection.

Understanding domain of geometric reflections as inner and outer points of the shape other than the given shapes and points

In the first interview, apart from the shape they received, they were also given a rectangle and a point inside and outside the rectangle to apply the geometric reflection to the the points inside and outside the shape (See. Figure 5).

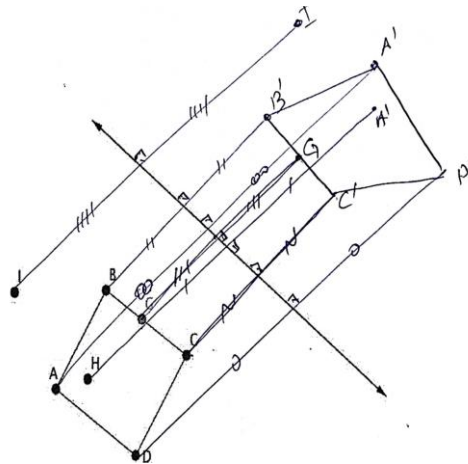


Figure 5. Geometric reflections sample of the first interview

All four teachers expressed the reflection of the rectangle by first taking the reflection of the vertices of the rectangle and then combining them. Then, they completed the geometric reflection by reflecting the points inside and outside the rectangle. To the question, "What did you reflect on the plane when doing the geometric reflection?" all three teachers except Mehmet said that they "did not reflect the rectangle at all, except for one point inside and outside the rectangle". Mehmet expressed his thoughts as follows:

M: I reflected the vertices of the figure on the plane, combined them, then reflected the point G, then the points I and H.

A: Did you reflect anything other than these [rectangle, I, H and G points]?

M: Apart from these, I reflected the points [points on the segment lines AB, BC, CD, AD], therefore, I have reflected the rectangle.

A: So you have only reflected the points belonging to the rectangle?

M: No, when we look at the points H and I, they do not belong to the rectangle, in other words, I reflected all the points that were in the region of the line and combined them.

A: Have you reflected another point in the first region [the left side of the symmetry axis]?

M: Points are even shapes without width and length. In other words, there are infinite points, we are reflecting them to the opposite side by accepting that there are (the points we have specified) here, in fact, we are reflecting the plane part [the left side of the symmetry axis] completely. I'm looking at it that way.

In other words, there are a lot of points that are not visible, we reflected the ones that are visible, but what is not visible is also reflected.

Mehmet's explanations show that the points given inside and outside the rectangle caused Mehmet to remember that the plane consists of infinite points and made him apply this definition in the geometric reflection. In other words, the points given inside and outside the rectangle reminded Mehmet that he should apply geometric reflection to the infinite points that appear and do not appear in the region on the left side of the symmetry axis. As a result, while Zeynep, Betül and Okan applied geometric reflections only to the given shape and points, Mehmet applied it to the plane on the left side of the symmetry axis. Although Mehmet applied the geometric reflection to the planar region of the left symmetry axis, all four teachers still have the action mental structure of the domain of geometric reflections. The reason for this is that they did not specify that the planar region to the left of the symmetry axis should be projected to the right and the planar region on the right should be projected to the left.

In the second interview, apart from the closed shapes (e.g.: triangle, rectangle) that teachers had received, they were also given an arc segment, marked points located in inside and outside areas of the arc segment, for teachers to apply geometric reflection by considering all points on the plane (See. Figure 6).

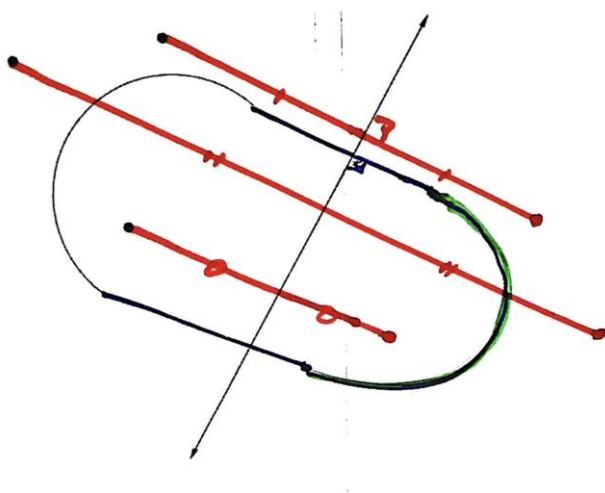


Figure 6. Geometric reflections sample of the second interview

All four teachers expressed the reflection of the circular segment by first reflecting the points of origin and endpoints and combining them. Then, they completed the geometric reflection by reflecting the points located in the inner and outer regions of the circular segment. When teachers, who completed the geometric reflection, were asked "What did you reflect on the plane when you did the geometric reflection?" all three teachers except Mehmet stated that they "reflected the circular segment, the three points given in the inner and outer regions of the circular segment". Mehmet, on the other hand, expressed his thoughts as follows:

A: When you made the reflections, what did you reflect on the plane?

M: I reflected the points and the circular segment.

A: Which points?

M: I have reflected all the points that appear and do not appear on the plane's left side.

A: Have you reflected anything other than these points?

M: I didn't reflect anything other than the visible or invisible points.

Mehmet's explanations show that the open shape, apart from the closed shape, made him continue to express that the plane consists of infinite points and that he should apply this expression to the geometric reflection on the plane. While Zeynep, Betül and Okan applied the geometric reflection only to the given open shape and points, Mehmet applied it to the entire plane on the left side of the symmetry axis. Although Mehmet continues to apply geometric reflection to the planar region on the left side of the symmetry axis, all four teachers still have the action mental structure of the domain of geometric reflections. The reason for this is that they did not start to think or specify that the planar region to the left of the symmetry axis should be projected to the right and the planar region on the right should be projected to the left.

In the third interview, instead of a closed or open shape, teachers were given a pentagon with a shaded area and points located in the areas inside and outside the pentagon to allow them to think about the plane more concretely. Teachers were asked to apply geometric reflection to this polygonal region and to the specified points (See. Figure 7)

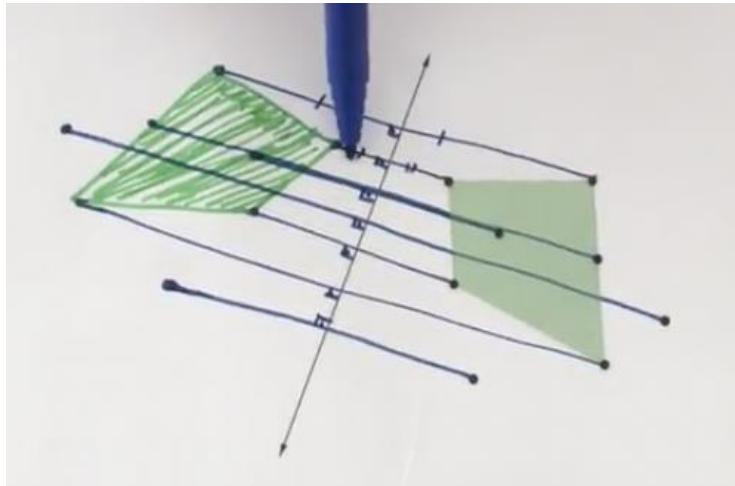


Figure 7. Geometric reflections sample of the third interview

All four teachers determined the rectangle area by first taking the reflection of the vertices of the rectangle and combining them, and by colouring the area; they then completed the geometric reflection of the figure by taking the reflection of the given points. To the question, "What did you reflect on the plane when doing the geometric reflection?", Okan and Betül answered that they "reflected the tetragonal region and other given points", while Zeynep gave the following answer "I reflected the points, a set of points, this set of points actually form a shape, it had a tetragonal shape". Mehmet replied with "all the points, all the points that are visible or not visible on one side of the line, no other point was reflected".

In order to encourage teachers to remember and interpret the definition of the plane, a question was directed to them, to make them think if there are any differences when applying geometric reflection to the rectangles in figure 6, and figure 8. Zeynep's answer to this question was "I have reflected infinite line segments of the rectangle in figure 8. In figure 6, I have reflected only four line segments (edges of the figure); Betül's answer was "I didn't reflect it thinking that there was a difference between them, but I showed the surface, because only one of them was a surface, in other words, a green surface was give, so I filled in that surface"; Okan's answer was "I only reflected the edges in figure 6. Here, I also reflected the shaded area." According to the answers given by the three teachers, the teachers consider the plane to be hollow. At the same time, teachers are not yet aware that they reflect points instead of shapes. This is an indication that teachers still do not remember the definition of the plane and cannot use this definition while applying geometric reflection. On the other hand, Mehmet's response was "nothing has changed, we're still reflecting points". Mehmet is aware that the plane consists of points, is not hollow and reflects points instead of shapes when applying geometric reflection.

The teachers' responses indicate that three teachers (Zeynep, Betül and Okan) still apply geometric reflection to only the given shape and points. At the same time, Mehmet stated that he only applied geometric reflection to the plane on the left side of the symmetry axis. Therefore, all four teachers still have the action mental structure of the domain of geometric reflections.

Understanding domain of geometric reflection as all points in the plane

At the end of three interviews with teachers, it was found that three teachers still have an action mental structure in understanding the domain of geometric reflection, and one teacher has made a transition to a mental process structure in understanding the domain of geometric reflections. In other words, three teachers applied geometric reflection to only the given shape and points and thought of the inside and outside of the shape as hollow. On the other hand, a teacher realized that the plane consists of infinite points and that geometric reflections should be applied, not only to the given shape or points, but to the entire plane. For example, at the third interview, one question was posed to teachers, where they were given shapes and points located to the right and left of the symmetry axis so that they could apply the geometric reflection by considering all the points on the plane. Teachers were asked to apply geometric reflection (See. Figure 8).

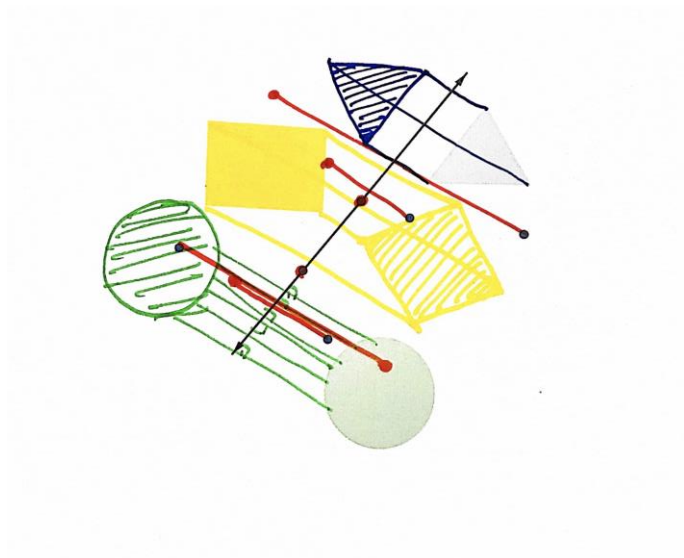


Figure 8. Geometric reflections sample of the third interview

All four teachers selected the vertices of the shapes and reflected the shapes in accordance to the axis of symmetry. Then, they completed the geometric reflection of the shapes by connecting the points and coloring the polygonal regions. Finally, they completed the geometric reflection by taking the reflections of the given points according to the symmetry axis. To the question of what they reflect on the plane when doing geometric reflection transformation, the teachers' answers were as follows (See. Table 5).

Table 5. *Participant Answers*

Zeynep	Betül	Okan	Mehmet
A: When reflecting the given shape, what did you reflect on the plane?	A: When reflecting the given shape, what did you reflect on the plane?	A: When reflecting the given shape, what did you reflect on the plane?	A: When reflecting the given shape, what did you reflect on the plane?
Z: I reflected the given figures, points and the points on the axis.	B: I have reflected the set of points that make up the shapes.	O: This time, I reflected a circular, triangular and rectangular region.	M: Again, I have reflected points.
A: Have you reflected any other points other than that?	A: Have you reflected anything other than that?	A: What do you mean when you say region?	A: Which points?
Z: No, I didn't.	B: No, I didn't.	O: I mean the inside. I'm talking about all the points in it.	M: I reflected all the visible and invisible points. I have only coloured the points that I reflected. It has emerged, the shapes have emerged as images on the opposite side. In fact, I have noticed that in questions prior to this, we have moved the points on both sides of the shape or mirror line. But since there was no apparent shape on the other side, it seemed as if it had not been moved or reflected. Correct! In fact, I have moved all the points on both sides of the mirror line to the opposite side.
		A: Have you reflected any other points other than that?	A: Have you reflected any other points other than that?
		O: There are extra points on the axis that I've reflected.	M: Other than that, I haven't reflected anything else.

The teachers' explanations show that three teachers (Zeynep, Betül and Okan) thought of the domain of geometric reflection as given shapes or points by saying that they only applied geometric reflection to the shapes and points given to them. Teachers did not apply the definition of the plane in the geometric reflection because they could not remember the definition that the plane consists of infinite points or because they had misconceptions. On the other hand, Mehmet's explanations show that he remembers that the plane consists of infinite points at the third interview, which made him apply this definition in the geometric reflection. Although Mehmet stated that the plane consists of infinite points, he was not able to use this definition in geometric reflection in previous interviews, but along with the question posed to him in the third interview, he was able to apply the plane definition to the geometric reflection correctly. In other words, the shapes and points located to the right and left of the symmetry axis have made him apply geometric reflection to all of the points that make up the plane. As a result, while the three teachers other than Mehmet still have the mental action structure of the domain

of geometric reflections, Mehmet has made the transition to the mental process structure of the domain of geometric reflections.

During the third interview, one of the questions posed to the teachers contained a yellow-colored plane, trapezoid and points given on the plane (see. Figure 8), so that the teachers can remember the plane definition and then apply this definition to the geometric reflections.

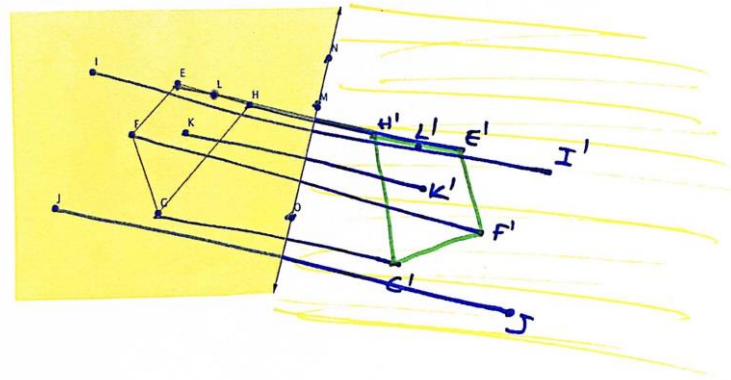


Figure 8. Geometric reflections sample of the third interview

Three teachers (Betül, Okan and Mehmet) completed the geometric reflection by first taking the reflection of the yellow-colored plane according to the axis of symmetry and then reflecting the given shape and points on the plane according to the axis of symmetry. On the other hand, Zeynep completed the geometric reflection after taking only the reflection of the yellow plane relative to the axis of symmetry, without reflecting the shapes and points. To the question of what you reflected on the plane when doing the geometric reflection, the teachers' answers were as follows (See. Table 6).

Table 6. Participant Answers

Zeynep	Betül	Okan	Mehmet
Z: I have already reflected four points (perceives the yellow colored plane as a shape, not as a plane, and refers to vertices). So I have reflected the entire domain of points.	B: The plane (he's talking about the yellow plane) consists of infinite points, since I can't reflect them all, I completed it by reflecting points, that I have specified.	O: I reflected the plane. I reflected the rectangle and the points.	M: I have reflected all the points to the right and left of the mirror line.
A: Have you reflected anything other than that?	A: Have you reflected anything other than that?	A: What plane and points are you talking about?	A: Have you reflected any points other than that?
Z: No, I didn't.	B: No, I didn't.	O: The yellow plane and the points and rectangle that were given to me.	M: Other than that, I haven't reflected on anything else. I've also reflected the points on the mirror line.
		A: Have you reflected anything other than that?	A: Is there anything to the right of the reflection line?
		O: No, I didn't.	M: There are invisible points to the right of it.
		A: Is there anything to the right of the reflection line?	M: During reflection, they were also moved to the opposite side as an invisible point.
		O: There was nothing to the right of the reflections line.	

When the teachers' responses are examined, it can be inferred that Zeynep does not remember or does not know the mathematical definition of the plane. Therefore, according to her answers, it can be deduced that Zeynep, when applying geometric reflection, saw the yellow plane as a shape, not a plane, and applied the geometric reflection to this shape. Zeynep still thinks of the plane as hollow. Betül began to remember the definition of the plane by expressing that the yellow-colored plane she applied the geometric reflection to, consists of infinite points. When applying geometric reflection, she stated that she did not reflect anything other than the specified points, since she thought that she could not reflect all of these points individually. Although Betül remembered the definition of the plane, she was unable to apply this definition in the geometric reflection. Okan stated that, in this question, he reflected the entire yellow-coloured plane, the rectangle and the points given to him, when applying the geometric reflection. Thus, he began to remember the definition of the plane. However, he thought and expressed that there was nothing to the right of the axis of symmetry. It is clear from the responses of all three teachers that teachers still have the action mental structure of the domain of geometric reflections. On the other hand, Mehmet's completion of the geometric reflection by stating that there are infinite points to the right and left of the symmetry axis, that all points on the plane should be reciprocally reflected to the right and left of the symmetry axis when applying the geometric reflection has shown one more time that he is in the process mental structure of the domain of geometric reflections.

At the end of the third interview, when teachers were again asked to define geometric reflection, Zeynep defined it as "drawing the distance of a point and a set of points from the axis of symmetry to the other side of the axis of symmetry"; Betül as "the image of a shape at equal distance from the axis of symmetry"; Okan defined it as "backwards-facing objects located in front of a mirror by considering the line as a mirror since we have been working with lines up until now" and Mehmet "the process of moving all the points located on the right and left side of the mirror line to the other side". As can be seen from the last definitions made by teachers, it can be inferred that Zeynep, Betül and Okan make geometric reflections by considering the physical images of shapes, without paying any attention to the plane. Therefore they think of the plane as hollow. Since they could not express that the plane consists of infinite points, they could not use this definition in the geometric reflection either. Therefore, it was revealed that all three teachers have an action mental structure of the domain of geometric reflections. When Mehmet's last definition of the geometric reflection was examined, it was seen that there were changes according to the definition he made at the first meeting. In his first definition, Mehmet defined the geometric reflection as an 'image of an object in a mirror' and he stated that he did not consider the plane, when applying geometric reflection, he only reflected the given shape and points. In his last definition, he stated that the plane consists of infinite points. When applying geometric reflections, it is necessary to apply the reflection to the entire plane located to the right and left of the symmetry axis. Therefore, it is clearly seen that Mehmet made a transition from the mental structure of action to the

mental structure of the process of the domain of geometric reflections. As a result, among four teachers, only Mehmet made the transition from the perspective of motion to the perspective of mapping.

When the reasons are examined for staying in the motion perspective of three teachers (Zeynep, Betül, and Okan), the teachers may not know the definition of the plane mathematically or they may not use the definition of the plane in performing geometric reflection. In Mehmet's transition from the motion perspective to the mapping perspective, the preparation of interview questions that reminded him of the definition of the plane (closed shape, concave shape, points given inside and outside the figure, giving shapes and points on both sides of the symmetry axis or shaded region) and the effect of open-ended questions asked in the process helped to understand that Mehmet should apply the geometric reflection to all points in the plane, not just given shapes or points.

Discussion and Interpretation

In this study, the answers to the following research questions were sought: "What perspective do high school mathematics teachers have in understanding the sub-concept domain of geometric reflection?", "What are the reasons as to why high school math teachers have the perspective of motion or mapping?" In the first interview with the teachers, it was revealed that all four teachers have an action mental structure in understanding the domain of geometric reflection. In other words, all four teachers have the perspective of motion in understanding the domain of geometric reflections. All four teachers applied geometric reflections by considering the domain of reflection as given shapes and/or points. One reason why teachers apply geometric reflection not to all points in the plane, but only to given shapes or points may be due to the fact that the mathematical definition of the plane is known incorrectly (thinking of the plane as hollow) or the definition of the plane (the plane consists of infinite points) is not used conceptually in geometric reflection (Akarsu, 2018; Hollebrands, 2003; Yanık, 2006).

After three interviews with all four teachers, Mehmet had a process mental structure in understanding the domain of geometric reflection, while the other three teachers remained in the action mental structure. In other words, while Mehmet transitioned from the perspective of motion to the perspective of mapping in understanding the geometric reflection, the other three teachers remained in the perspective of motion. One of the reasons Zeynep, Betül and Okan remain in the perspective of motion may be because they have not learned or have never experienced geometric reflection of all points in the plane (Akarsu, 2018; Yanık and Flores, 2009). Despite the different shapes given throughout all the interviews, it may have been a new and challenging concept for Zeynep, Betül and Okan to apply geometric reflection to all points on the plane (Yanık and Flores, 2009).

One of the reasons all three teachers apply the geometric reflection only to the given points and figures may be how the geometric reflection is explained in the books (Jones, 2004; Zorin, 2011). When the textbooks of the Ministry of National Education (MEB) were examined, it was found that the lectures and examples in the books were only for the performing geometric reflection to the given points and

figures. In other words, the textbooks are written for the supporting motion perspective rather than the mapping perspective. For example, in the eighth-grade textbook, geometric reflection is defined as "the reflection of a shape according to the line." In the 12th grade, geometric reflection is defined as "taking the symmetry of a shape for a point or a line". When these definitions are examined, it is stated that instead of reflecting all points in the plane, only the geometric reflection should be applied to the given shape or points. This is a misconception and books need to be rewritten from a mapping perspective.

For Mehmet, the points given inside and outside the rectangle made him remember the mathematical definition of the plane and therefore helped him use it in the geometric reflections. The reason for Mehmet's development may be due to the variety of shapes, which were given to be reflected in the interviews. In other words, this could be caused by the fact that, when applying geometric reflections, Mehmet was only given a shape, independently from the infinite points in the plane (Akarsu, 2018). Another development in Mehmet is that due to the shapes and points given on both sides of the symmetry axis, he began to think that the geometric reflection should be applied not only to the semi-plane where the given shape is located but to all the infinite points on both sides of the symmetric axis. As a result, in geometric reflections, the diversity of the shape to be reflected is a crucial factor in remembering or learning that the infinite points in the plane should be reflected (Akarsu, 2018).

Limitation

There are three limitations in this study. The first limitation is that the study sample was limited to four participants. Because easily accessible case sampling was used in the sample selection method of this study, participants who could provide accurate information about the subject in a short time were chosen, and the study was carried on with four participants. It should be taken into account that with a wider sample selection, the study results may have been different. The second limitation is that the teachers participating in the study are limited to being high school mathematics teachers. Since the teachers who provide education at the secondary school level use topics and concepts such as function, reflection, domain, point, plane more often in their lessons than at the primary school level, it was thought that they would share their experience more efficiently during the interviews. At the same time, in the process of interviews with the teachers participating in the study, it was decided to only work with high school mathematics teachers since a program that matches the teaching schedules had to be made. The third limitation is that the data collected consist not only of verbal, but also of non-verbal behavior, peculiar speech features, gestures and expressions. Considering that the participants could not fully express their thoughts during the interviews, the researchers inferred from the participants' body language and the forms of expression they used.

Recommendations

In this study, by revealing the perspectives that teachers have in understanding the domain of geometric reflection, the transition processes from a motion perspective to a mapping perspective were

examined and required interviews were conducted with teachers. In another study, the transition processes from the perspective of motion to the mapping perspective can be examined by revealing the perspectives that teachers have about the sub-concepts of the axis of symmetry and the plane.

References

- Ada, T., & Kurtuluş, A. (2010). Students' misconceptions and errors in transformation geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(7), 901-909.
- Akarsu, M. (2018). *Pre-service teachers' understanding of geometric reflections in terms of motion and mapping view*. Unpublished Doctoral Dissertation, Purdue University, Indiana, USA.

- Akarsu, M. (2022). Understanding of Geometric Reflection: John's learning path for geometric reflection. *Journal of Theoretical Educational Science*, 15(1), 64-89.
- Aktaş, G. S., & Ünlü, M. (2017). Understanding of eight grade students about transformation geometry: Perspectives on students' mistakes. *Journal of Education and Training Studies*, 5(5), 103-119. doi: 10.11114/jets.v5i5.2254
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., et al. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York, NY: Springer.
- Coxford Jr, A. F. (1973). Geometry in the Mathematics Curriculum: A Transformation Approach to Geometry. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*.
- Demir, Ö., & Kurtuluş, A. (2019). Dönüşüm geometrisi öğretiminde 5E öğrenme modelinin 7. Sınıf öğrencilerinin Van Hiele dönüşüm geometrisi düşünme düzeylerine etkisi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 20, 1279-1299.
- Desmond, N. S. (1997). *The geometric content knowledge of prospective elementary teachers*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Minnesota.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Edwards, L. (2003, February). The nature of mathematics as viewed from cognitive science. Paper presented at 3rd Congress of the European Society for Research in Mathematics, Bellaria, Italy.
- Flanagan, K. A. (2001). *High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment*. Unpublished Doctoral Dissertation, The Pennsylvania State University, 2001.
- Hacısalihoğlu Karadeniz, M., Baran, T., Bozkuş, F., & Gündüz, N. (2015). İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının yansıma simetrisi ile ilgili yaşadıkları zorluklar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 6(1), 117-138. <https://doi.org/10.16949/turcomat.71538>
- Harper, S. R. (2002). *Enhancing elementary pre-service teachers' knowledge of geometric transformations*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Virginia, 2002.
- Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 55-72.
- Jones, D. L. (2004). *Probability in middle grades textbooks: an examination of historical trends, 1957-2004*. Unpublished doctoral dissertation, University of Missouri- Columbia, Dissertation Abstracts International, AAT 3164516.

- Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 1(1), 3-8.
- Köse, N. Y., (2012). İlköğretim öğrencilerinin doğruya göre simetri bilgileri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 42(42).
- Martin, G. E. (1982). *Transformation geometry: An introduction to symmetry*. New York: Springer-Verlag.
- Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber* (Çev. Turan, S.). Ankara: Nobel.
- Mhlolo, M. K., & Schäfer, M. (2014). Potential gaps during the transition from the embodied through symbolic to formal worlds of reflective symmetry. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 18(2), 125-138.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2010). MEB Yaygın Eğitim Kurumları Yönetmeliği. Resmî gazete. (<https://dspace.ceid.org.tr/xmlui/handle/1/297>)
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.
- Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation* (No. 4). Sage.
- Son, J. W., & Sinclair, N. (2010). How preservice teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics*, 110(1), 31-46.
- Yanık, H. B. (2006). Prospective elementary teachers' growth in knowledge and understanding of rigid geometric transformations. Unpublished Doctoral Dissertation, Arizona State University, 2006.
- Yanık, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics*, 78(2), 231-260.
- Yanık, H. B. (2014). Middle-school students' concept images of geometric translations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 33-50.
- Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara
- Yin, R.K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th ed). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Zembat, İ. Ö. (2007). Yansıma dönüşümü, doğrudan öğretim ve yapılandırmacılığın temel bileşenleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 27(1), 195-213.
- Zorin, B. (2011). *Geometric transformations in middle school mathematics textbooks*. University of South Florida.