

Paralel Manipülatörlerin Tahrik Dejenerasyon Konumlarında Hareketi

S. Kemal İder

Prof. Dr.

Makina Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
06531, Ankara

Paralel manipülatörlerde tahrik ünitelerinin uç elemanının bazı yönlerde kontrolünü kaybettiği tekil konumlar oluşmaktadır. Bu konumlarda, gereken tahrik kuvvetleri sonsuza gitmektedir. Tahrik tekil konumları'ndan yörünge planlaması sırasında kaçınmak manipülatörün hareket bölgesinin önemli ölçüde daralmasına sebep olduğu için iyi bir çözüm değildir. Bu makalede, eğer yörünge bazı şartları sağlayacak şekilde seçilirse manipülatörün tekil konumlardan stabil bir şekilde geçebileceği gösterilmektedir. Ayrıca tekil konumların civarında gereken tahrik kuvvetlerini hesaplayabilmek için dinamik denklemler daha yüksek türev bilgileri kullanılarak değiştirilmektedir.

Anahtar kelimeler: Paralel manipülatör, ters dinamik, tekil konumlar, tahrik tekil konumları

1. GİRİŞ

Kapalı zincir yapısından dolayı paralel manipülatörler daha yüksek rijitlik/ağırlık oranına sahiptir. Ayrıca, sadece bazı mafsallar tahrik edildiği için tahrik elemanlarının yere yakın yerleştirilebilmesi verimliliği arttırmaktadır. [1,2]

Diğer taraftan, kapalı zincir yapısı özel dejenerasyon konumlarının ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Bu konumlar tahrik elemanlarının manipülatörün hareketini bazı yönlerde kontrol etme yeteneğini yitirdikleri *tahrik tekil konumları*'dır. Bu tip tekil konumlar ile ilgili olarak daha önce yapılmış olan çalışmaların çoğu bu konumlardan kaçınmak amacı ile bunların yerlerini belirlemeye yönelik olmuştur [3-8]. Halbuki tahrik tekil konumları ulaşım alanının iç kısımlarında yer almaktadır ve dolayısı ile bunlardan kaçınmak manipülatörün hareket edebileceği bölgeyi kısıtlar. Tahrik tekil konumlarının, seri robotların kooperasyon içinde çalışmaları durumunda da olduğu ve bu çerçevede kullanılacak bazı kontrol yöntemleri referans [9]'da gösterilmiştir.

Bu makalede paralel manipülatörlerin tahrik tekil konumlarından stabil ve hatasız bir şekilde geçebilmelerini sağlayacak şartların ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bunun için yörünge, dinamik denklemlerin gerektirdiği bazı özel şartları sağlaması gerektiği gösterilmektedir. Ayrıca, dejenerasyon olan dinamik denklemlerden kontrol kuvvetlerinin elde edilebilmesi için daha yüksek derecedeki türev bilgileri gözönüne alınarak bulunan yeni dinamik denklemler kullanılmaktadır. Dinamik

denklemlerin bu şekilde değiştirilmesi daha önce fazla mafsallı seri manipülatörlerin tahrik tekil konumları için geliştirilmiş olan değişikliklerin [10] bir benzeridir. Geliştirilen yöntem 3 serbestlik dereceli 2-RPR düzlemsel paralel manipülatörün simülasyonu yapılarak açıklanmaktadır. Bu yöntem ayrıca bir bildiride [11] 2 serbestlik dereceli 2-RRR manipülatörüne uygulanmıştır.

2. TERS DİNAMİK DENKLEMLERİ VE TAHİRİK TEKİL KONUMLARI

Serbestlik derecesi n olan bir paralel robot, tahrik edilmeyen mafsallarından yeteri kadarı açılarak bir açık sisteme dönüştürüldüğünde açık sistemin serbestlik derecesi m ise, bağımsız kapalı zincir şartlarının sayısı $m-n$ 'dir. Açık sistemin mafsallı değişkenleri vektörü $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_m]^T$ olarak yazılabilir. Bu değişkenlerden n adedi tahrik edilen mafsalların değişkenleridir. Açılan mafsallar tekrar kapatıldığında oluşan kapalı zincir şartları

$$\phi_i(\eta_1, \dots, \eta_m) = 0 \quad i = 1, \dots, m - n \quad (1a)$$

olarak yazılabilir. Robotun uç elemanının Kartezyen değişkenlerinin belirlenmiş fonksiyonları, $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ robotun görevlerini ifade eder. Bundan dolayı mafsallı değişkenleri arasındaki bağıntılar

$$f_i(\eta_1, \dots, \eta_m) = x_i \quad i = 1, \dots, n \quad (1b)$$

şeklinde yazılabilir. Kapalı zincir şartları ve görev şartları hız seviyesinde beraberce aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\Gamma \dot{\eta} = \mathbf{h} \quad (2)$$

Burada, $\Gamma^T = \begin{bmatrix} \Gamma^{K^T} & \Gamma^{G^T} \end{bmatrix}$ ($m \times m$ matris),

$$\Gamma_{ij}^K = \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta_j}, \quad i = 1, \dots, m-n, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\Gamma_{ij}^G = \frac{\partial f_i}{\partial \eta_j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad \text{ve}$$

$\mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dot{\mathbf{x}}^T \end{bmatrix}$ dir. Denklem (2)'nin türevi ivme seviyesindeki şartları verir:

$$\Gamma \ddot{\eta} = -\dot{\Gamma} \dot{\eta} + \dot{\mathbf{h}} \quad (3)$$

Paralel manipülatörün dinamik denklemleri

$$\mathbf{M} \ddot{\eta} - \Gamma^{K^T} \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Z}^T \mathbf{T} = \mathbf{R} \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerde \mathbf{M} açık sistemin $m \times m$ genelleştirilmiş kütle matrisini, \mathbf{R} genelleştirilmiş Coriolis, merkezkaç ve ağırlık vektörünü, $\boldsymbol{\lambda}$ zincir kapatılan mafsallardaki mafsallık kuvvetleri vektörünü, \mathbf{T} tahrik kuvvetleri vektörünü, ve $n \times m$ boyutlu \mathbf{Z} matrisinin her sırası bir tahrik kuvvetinin genelleştirilmiş uzaydaki yönünü göstermektedir. Eğer i 'inci tahrik kuvvetinin bulunduğu mafsallık değişkeni η_k ise \mathbf{Z} 'nin i 'inci sırası, $Z_{ik} = 1$ and $Z_{ij} = 0$ for $j = 1, \dots, m (j \neq k)$ olur.

Denklem (4) bilinmeyen kuvvetler olan $\boldsymbol{\lambda}$ ve \mathbf{T} 'yi çözmek üzere aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M} \ddot{\eta} - \mathbf{R} \quad (5)$$

Burada $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \Gamma^{K^T} & \mathbf{Z}^T \end{bmatrix}$ ($m \times m$ matris) ve

$\boldsymbol{\mu}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix}$ (m boyutlu vektör)'dür.

Sistemin ters dinamik çözümü için önce kinematik denklemler (1)-(3)'den η , $\dot{\eta}$ ve $\ddot{\eta}$ bulunur, daha sonra denklem (5)'den $\boldsymbol{\mu}$ (dolayısı ile tahrik kuvvetleri vektörü \mathbf{T}) elde edilir.

Ancak ters kinematik çözüm sırasında $|\Gamma| = 0$ olan konumlar, kinematik denklemlerin dejenere olduğu, çözüm olmayan *ters kinematik tekil*

konumları olmaktadır. Bu konumlarda istenilen $\dot{\mathbf{x}}$ ve $\ddot{\mathbf{x}}$ manipulator tarafından genelde elde edilemez, çünkü denklem (2)'de görüldüğü gibi Γ 'in kolonlarının kapsadığı vektör uzayının dışında yer alan bir \mathbf{h} vektörü elde edilemez ve dolayısı ile manipulator bir ya da daha fazla serbestlik derecesi kaybeder.

Dinamik denklemlerin tahrik kuvvetleri için çözümünü sırasında ise $|\mathbf{A}| = 0$ olduğu başka bir tip tekil konumlar söz konusu olmaktadır. Bu tekil konumların yerleri \mathbf{Z} matrisine bağımlı olduğu için tahrik edilen mafsallar değiştiği takdirde farklı olmaktadır. Bu tip dejenerasyon, sistemin tahrik edilebilip edilememesi özelliği ile ilgili olduğundan bu konumlara *tahrik tekil konumları* denilecektir. Tahrik tekil konumlarında, istenilen $\ddot{\eta}$, tahrik elemanları tarafından genel olarak gerçekleştirilemez, çünkü denklem (5)'de görüldüğü gibi \mathbf{A}^T 'un kolonlarının kapsadığı uzayın dışında yer alan bir $\mathbf{M} \ddot{\eta} - \mathbf{R}$ vektörü elde edilemez, yani tahrik elemanları uç elemanına bazı yönlerde istenen ivmeleri veremezler ve dolayısı ile tahrik elemanları bir ya da daha fazla serbestlik derecesinin kontrolünü kaybeder. (Sistem, tahrik üniteleri kilitlense bile uç elemanına bu yönlerde gelen kuvvetleri taşıyamaz.)

Γ^K matrisinin tahrik edilmeyen mafsalların değişkenlerine karşılık gelen kolonlarından oluşan $(m-n) \times (m-n)$ boyutlu matris Γ^{K*} olarak adlandırılırsa, $Z_{ik} = 1$ ve $Z_{ij} = 0 (j \neq k)$ olduğu için tahrik tekilliği şartı, $|\mathbf{A}| = 0$ yerine eşdeğer olarak $|\Gamma^{K*}| = 0$ olarak da yazılabilir.

3. TAHİRİK TEKİL KONUMLARI İÇİN GEREKEN BAĞDAŞMA ŞARTLARI

Yörünge planlaması aşamasında tekil konumlardan kaçınmak mümkündür. Tekil konumlardan kaçınmak ters kinematik tekil konumları için kolayca mümkündür çünkü ters kinematik tekil konumları genellikle manipülatörün erişim alanının kenarlarında oluşmaktadır [7]. Bu makalede Γ 'in rankının her zaman tam boyuta eşit olduğu yani sistemin hiçbir zaman bir ters kinematik tekil konuma gelmeyeceği kabul edilmiştir. Diğer taraftan tahrik tekil konumları erişim alanının iç kısımlarında yer aldığından bu konumlardan kaçınmak çalışma bölgesinin önemli ölçüde kısıtlanmasına sebep olur. Bu yüzden kontrol kuvvetleri stabil kalacak şekilde manipülatörün bu konumlardan geçmesini sağlayacak yöntemlerin geliştirilmesi önemlidir. Bu amaç için tekil konumda (5) dinamik denkleminin oluşturduğu denklemlerin birbirleri ile bağdaşan denklemler olması gereksinimi

vardır, yani \mathbf{A}^T 'un satır vektörleri arasında yer alan ilişkinin sağ taraf vektörü olan $\mathbf{M}\ddot{\eta} - \mathbf{R}$ 'de de olması gerekir ki bu vektör \mathbf{A}^T 'un kolonlarının kapsadığı uzayda yer alsın.

Bir tahrik tekil konumunda \mathbf{A} 'nın rankı genellikle $m-1$ olur. Bu yüzden gereken bağdaşma şartları bu makalede rankın $m-1$ olması durumu için çıkarılacaktır. Tahrik tekil konumunda \mathbf{A}^T 'un s satırının diğer satırların lineer kombinasyonu olduğu düşünülürse

$$\begin{aligned} A_{sj}^T &= \alpha_p A_{pj}^T & p &= 1, \dots, m & (p \neq s), \\ j &= 1, \dots, m, & & & (6) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada α_p lineer kombinasyon katsayılarıdır. (Denklemlerde toplama işareti gösterilmemiştir. Bir terimde tekrar edilen indisler menzilleri boyunca toplama olduğunu gösterir.) Bu durumda matris denklemi (5)'deki denklemler dizisinin birbirleri ile bağdaşan denklemler olması için aralarında olması gereken ilişki aşağıdaki gibidir.

$$A_{sj}^T \mu_j - \alpha_p A_{pj}^T \mu_j = M_{sj} \ddot{\eta}_j - R_s - \alpha_p (M_{pj} \ddot{\eta}_j - R_p) \quad (7)$$

Denklem (6) gözönüne alındığında denklem (7) aşağıdaki duruma gelir.

$$M_{sj} \ddot{\eta}_j - R_s = \alpha_p (M_{pj} \ddot{\eta}_j - R_p) \quad (8)$$

Denklem (8), tekil konumda $\ddot{\eta}_j$ tarafından sağlanması gereken *bağdaşma şartı*'dır. $\ddot{\eta}_j$, ters kinematik çözümü ile denklem (3)'den elde edildiği için $\ddot{\mathbf{x}}$ yörüngesinin denklem (8)'i sağlayacak şekilde planlanması gerektiği ortaya çıkmaktadır.

4. DİNAMİK DENKLEMLERİN DEĞİŞTİRİLMESİ

Bağdaşma şartları sağlansa bile tekil konumların civarında $|\mathbf{A}| \cong 0$ olduğu için denklem (5)'den μ doğru olarak hesaplanamamaktadır. Bu yüzden dinamik denklemlerin türevi gözönüne alınacaktır. Denklem (7)'nin türevi alındığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} (A_{sj}^T - \alpha_p A_{pj}^T) \dot{\mu}_j + \\ (\dot{A}_{sj}^T - \alpha_p \dot{A}_{pj}^T - \dot{\alpha}_p A_{pj}^T) \mu_j = (M_{sj} - \alpha_p M_{pj}) \ddot{\eta}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + (\dot{M}_{sj} - \alpha_p \dot{M}_{pj} - \dot{\alpha}_p M_{pj}) \dot{\eta}_j \\ - \dot{R}_s + \alpha_p \dot{R}_p + \dot{\alpha}_p R_p \end{aligned} \quad (9)$$

Denklem (9)'daki $\dot{\mu}_j$ 'lerin katsayıları tekil konumda denklem (5)'den dolayı sıfıra eşit olduğu için $\dot{\mu}_j$ 'li terim, tekil konuma belli bir yakınlıkta diğer terimlere göre ihmal edilebilir seviyededir. Bu terimin atılması ile tekil konum civarında geçerli olmak üzere aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} (\dot{A}_{sj}^T - \alpha_p \dot{A}_{pj}^T - \dot{\alpha}_p A_{pj}^T) \mu_j = (M_{sj} - \alpha_p M_{pj}) \ddot{\eta}_j + (\dot{M}_{sj} - \alpha_p \dot{M}_{pj} \\ - \dot{\alpha}_p M_{pj}) \dot{\eta}_j - \dot{R}_s + \alpha_p \dot{R}_p + \dot{\alpha}_p R_p \end{aligned} \quad (10)$$

Denklem (10), matris denklemi (5)'in s satırının yerine kullanılabilir *değiştirilmiş dinamik denklem* olup bilinmeyen kuvvetleri $\ddot{\eta}_j$ 'lere ilişkilendirmektedir.

Denklem (5)'in s satırının denklem (10) ile değiştirilmesi ile tahrik kuvvetlerini bulmak üzere aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{S} \quad (11)$$

Buradaki \mathbf{D} ve \mathbf{S} şu şekildedir:

$$\begin{aligned} D_{ij}^T = \begin{cases} A_{ij}^T & i \neq s \\ \dot{A}_{ij}^T - \alpha_p \dot{A}_{pj}^T - \dot{\alpha}_p A_{pj}^T & i = s \end{cases} \quad (12) \\ \text{ve} \\ S_i = \begin{cases} M_{ij} \dot{\eta}_j - R_i & i \neq s \\ (M_{ij} - \alpha_p M_{pj}) \dot{\eta}_j + (\dot{M}_{ij} - \alpha_p \dot{M}_{pj} - \dot{\alpha}_p M_{pj}) \dot{\eta}_j \\ - \dot{R}_i + \alpha_p \dot{R}_p + \dot{\alpha}_p R_p & i = s \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

Paralel manipülatörlerin *ters dinamik algoritması* aşağıda verilmiştir:

1. Paralel manipülatörün tahrik tekil konumlarını ve bu konumlardaki lineer bağımlılık katsayılarını bulunuz.

2. Eğer uç elemanı tahrik tekil konumlarından geçiyorsa uç elemanının yörüngesini tekil konumlardaki bağdaşma şartlarını sağlayacak şekilde seçiniz.

3. Zaman: $t = 0$.

4. Kinematik denklemlerden η , $\dot{\eta}$ ve $\ddot{\eta}$ 'yi nümerik olarak bulunuz.

5. $g(\eta_1, \dots, \eta_m) = 0$, $|A| = 0$ 'dan elde edilen tekil olma şartı ve ϵ belirlenmiş bir küçük pozitif sayı olsun. Eğer manipulator bir tekil konumun civarında ise, yani $|g(\eta_1, \dots, \eta_m)| < \epsilon$ ise, μ 'yu, denklem (3)'ün türevinden $\ddot{\eta}$ 'yi bulduktan sonra, denklem (11)'den bulunuz.

6. Eğer manipulator bir tekil konumun civarında değil ise, yani $|g(\eta_1, \dots, \eta_m)| > \epsilon$ ise, μ 'yu denklem (5)'den bulunuz.

7. $t = t + \Delta t$. Son zamana gelindi ise durunuz. Aksi halde 4 basamağına gidiniz.

5. ÖRNEK

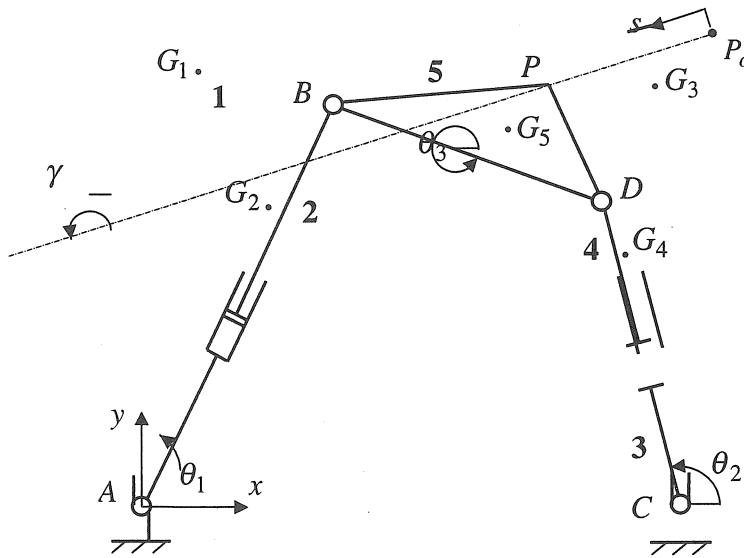
Şekil 1'de görülen 2-RPR düzlemsel paralel manipulatorün serbestlik derecesi 3'tür ($n = 3$). Sistem A'daki döner mafsaldan tahrik edilmektedir. D noktasındaki döner mafsaldan açılması düşünülerek elde edilen açık sistemin mafsaldan değişkenleri vektörü

$$\eta = [\theta_1 \quad \zeta_1 \quad \theta_2 \quad \zeta_2 \quad \theta_3]^T \quad \text{olmaktadır.}$$

Burada $\zeta_1 = AB$ ve $\zeta_2 = CD$ 'dir. P noktası operasyon noktası olduğundan hareketli platformun pozisyon ve açısal konum vektörü $x = [x_P \quad y_P \quad \theta_3]^T$ olmaktadır. Tahrik kuvvetleri vektörü $T = [T_1 \quad F_1 \quad F_2]^T$ sırasıyla A'daki motor kuvveti ile ζ_1 ve ζ_2 'ye karşılık gelen doğrusal tahrik elemanı kuvvetlerinden oluşmaktadır.

Görev şartlarının hız seviyesindeki $\Gamma^G \dot{\theta} = \dot{x}$ denklemindeki Γ^G aşağıda verilmiştir.

$$\Gamma^G = \begin{bmatrix} -\zeta_1 \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & -c \sin(\theta_3 + \alpha) \\ \zeta_1 \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 0 & c \cos(\theta_3 + \alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$



Şekil 1. 2-RPR düzlemsel paralel manipulator

Sistemin kütle matrisi M ile Coriolis, merkezkaç ve ağırlık vektörü R şu şekildedir:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & M_{15} \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & M_{25} \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ M_{51} & M_{52} & 0 & 0 & M_{55} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix}$$

Burada

$$M_{11} = m_1 g_1^2 + I_1 + m_2 (\zeta_1 - g_2)^2 + I_2 + m_5 \zeta_1^2,$$

$$M_{15} = m_5 \zeta_1 g_5 \cos(\theta_1 - \theta_3 - \beta),$$

$$M_{22} = m_2 + m_3,$$

$$M_{25} = m_5 g_5 \sin(\theta_1 - \theta_3 - \beta),$$

$$M_{33} = m_3 g_3^2 + I_3 + m_4 (\zeta_2 - g_4)^2 + I_4,$$

$$M_{44} = m_4, \quad M_{51} = m_5 \zeta_1 g_5 \cos(\theta_1 - \theta_3 - \beta),$$

$$M_{52} = m_5 g_5 \sin(\theta_1 - \theta_3 - \beta),$$

$$M_{55} = m_5 g_5^2 + I_5,$$

$$R_1 = 2 m_2 (\zeta_1 - g_2) \dot{\zeta}_1 \dot{\theta}_1 + m_5 \zeta_1 g_5 \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_3 - \beta) + [m_1 g_1 + m_2 (\zeta_1 - g_2) + m_5 \zeta_1] g \cos \theta_1,$$

$$R_2 = -m_5 g_5 \dot{\theta}_3^2 \cos(\theta_1 - \theta_3 - \beta) - m_2 (\zeta_1 - g_2) \dot{\theta}_1^2 - m_5 \zeta_1 \dot{\theta}_1^2 + (m_2 + m_5) g \sin \theta_1,$$

$$R_3 = 2 m_4 (\zeta_2 - g_4) \dot{\zeta}_2 \dot{\theta}_2 + [m_3 g_3 + m_4 (\zeta_2 - g_4)] g \cos \theta_2,$$

$$R_4 = m_4 (g_4 - \zeta_2) \dot{\theta}_2^2 + m_4 g \sin \theta_2,$$

$$R_5 = m_5 g_5 [2 \dot{\zeta}_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_3 - \beta) - \dot{\zeta}_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_3 - \beta) + g \cos(\theta_3 + \beta)]$$

Tahrik edilen mafsalların değişkenleri θ_1 , ζ_1 ve ζ_2 olduğuna göre tahrik yön matrisi,

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

olmaktadır. A^T ise şu şekildedir:

$$A^T = \begin{bmatrix} -\zeta_1 \sin \theta_1 & \zeta_1 \cos \theta_1 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 1 & 0 \\ \zeta_2 \sin \theta_2 & -\zeta_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 & 1 \\ -b \sin \theta_3 & b \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$|A| = b \zeta_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)$ olduğundan tahrik tekil konumları $\zeta_2 = 0$ veya $\sin(\theta_2 - \theta_3) = 0$ olan konumlardır. Pratikte ζ_2 'nin sıfır olamayacağı düşünüldüğünde manipülörün tahrik tekil konumları $\theta_2 - \theta_3 = \pm n \pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) olan konumlar, yani B, D ve C noktalarının aynı doğru üzerine geldiği konumlardır. (Burada $g(\eta_1, \dots, \eta_m) = \theta_2 - \theta_3 \mp n \pi$ 'dir.) Görüldüğü gibi tahrik tekil konumları erişim alanının iç kısımlarında oluşmaktadır. Bu konumlardan kaçınmak için D noktasının BC doğrusunun sadece bir tarafında kalacağı bir çalışma bölgesi ile hareketi kısıtlamak gerekirdi. Bir başka deyişle erişim alanının tümünün kullanılabilmesi için manipülörün tahrik tekil konumlarından geçmesi gerekmektedir.

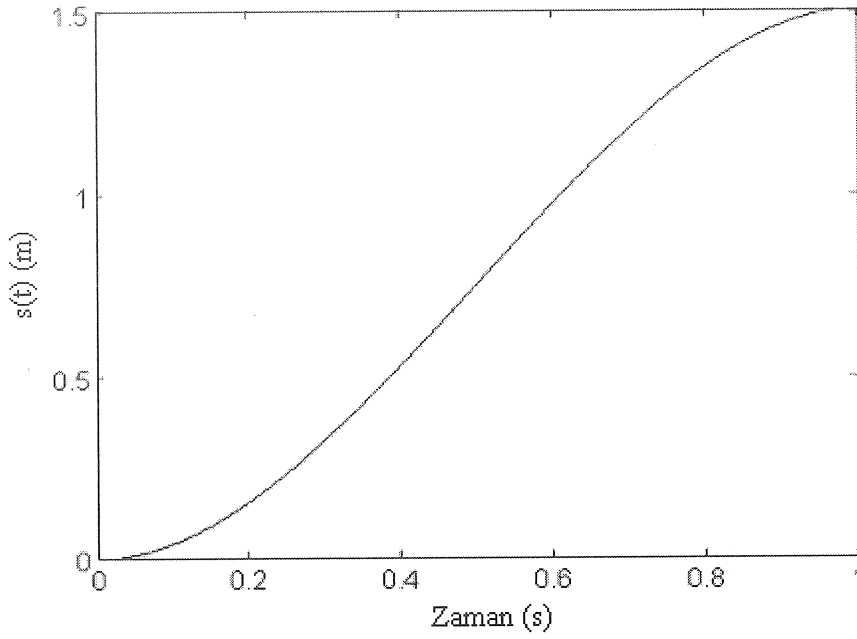
P noktası $s = L_d = 0.662 \text{ m}$ 'ye geldiğinde manipülör, $\theta_2 = \theta_3 + \pi$ olduğu tekil konuma gelmektedir. Bu pozisyonda A^T 'un üçüncü satırı beşinci satırın $\frac{\zeta_2}{b}$ katına eşit olur. Sistemin genelleştirilmiş ivmelerinin sağlanması gereken bağdaşma şartı denklem (8)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_{33} \ddot{\theta}_2 - \frac{\zeta_2}{b} (M_{51} \ddot{\theta}_1 + M_{52} \ddot{\zeta}_1 + M_{55} \ddot{\theta}_3) = R_3 - \frac{\zeta_2}{b} R_5 \quad (20)$$

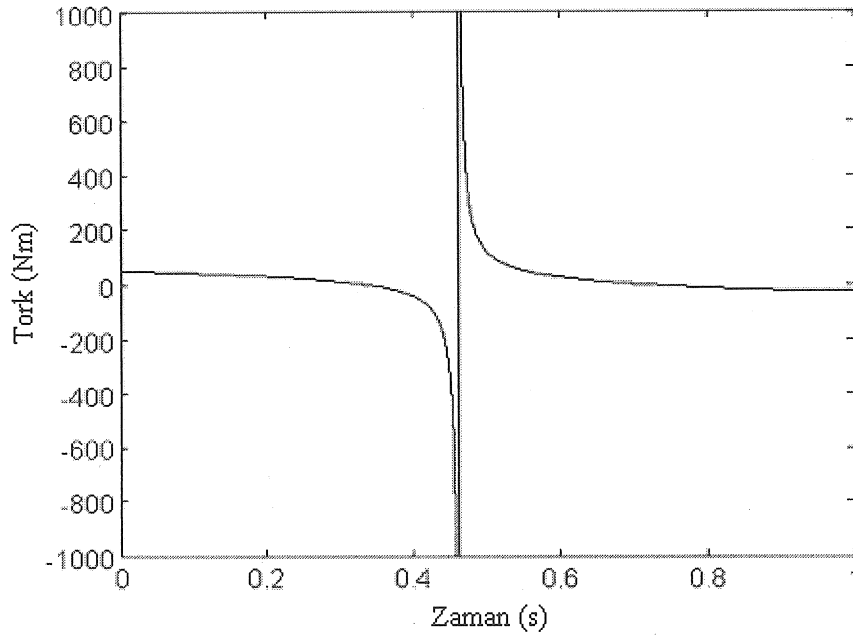
Bir tahrik tekil konumundan geçerken bağdaşma şartını sağlamıyan bir yörünge gerçekteştirilebilmesi mümkün olmamaktadır. Örnek olarak zaman fonksiyonu, $s(t)$ için ilk ve son hızları sıfır olan üçüncü dereceden bir polinom, yani

$s(t) = \frac{3Lt^2}{T^2} - \frac{2Lt^3}{T^3}$ alınmıştır (Şekil 2). Tekil konuma $t = 0.46$ s 'de ulaşılmaktadır. Şekil 3 ve Şekil 4'de görüldüğü gibi gereken tahrik kuvvetleri

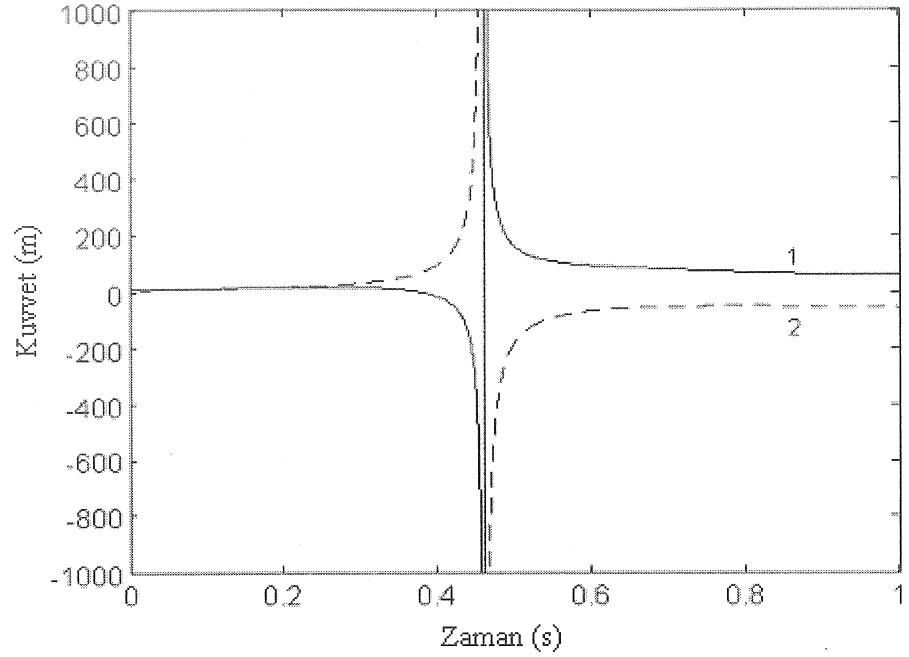
tekil konuma yaklaştıkça artmakta, tekil konumda ise sonsuza gitmektedir. (Şekillerde tekil konuma yakın yerlerde kuvvetler ölçek dışında kalmaktadır.)



Şekil 2. Bağdaşma şartını sağlamayan $s(t)$



Şekil 3. Bağdaşma şartını sağlamayan yörünge için motor torku, T_1



Şekil 4. Bağdaşma şartını sağlamayan yörünge için doğrusal tahrik kuvvetleri.

1. F_1 , 2. F_2

Zaman fonksiyonu $s(t)$ için ilk ve son hızların sıfır olmasının yanısıra bağdaşma şartını da sağlayan bir polinom seçilecektir. Bunun için tekil konuma gelme zamanı, T_d , ve P noktasının bu andaki hızı, $v_P(T_d)$ serbestçe seçilebilir. İvme düzeyindeki kapalı zincir şartları, platformun bilinen açısal ivmesi ($\ddot{\theta}_3 = 0$), P noktasının ivmesinin bilinen yönü ($\gamma = 200^\circ$) ve bağdaşma şartı olan denklem (20), genelleştirilmiş ivmelerin tekil konumdaki değerlerini veren 5 denklemi oluşturmaktadır. Böylece, tekil konumdaki η ve $\dot{\eta}$ değerleri de kullanılarak P noktasının ivmesi, $a_P(T_d)$ bulunmaktadır. Sonuç olarak $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$, $s(T) = L$, $\dot{s}(T) = 0$, $s(T_d) = L_d$, $\dot{s}(T_d) = v_P(T_d)$ ve $\ddot{s}(T_d) = a_P(T_d)$ şartlarını sağlayan altıncı dereceden bir polinom seçilmektedir. T_d ve $v_P(T_d)$, $s(t)$ fonksiyonunda lokal tepeler meydana gelmeyecek şekilde sınıma yanılma ile seçilmektedir. Kullanılan değerler $T_d = 0.62s$ ve $v_P(T_d) = 1.7 m/s$ 'dir. Buradan

$a_P(T_d) = 10.6 m/s^2$ bulunmaktadır. Elde edilen $s(t)$ fonksiyonu denklem (21)'de verilmiştir ve Şekil 5'de görülmektedir.

$$s(t) = 20.733t^2 - 87.818t^3 + 146.596t^4 - 103.669t^5 + 25.658t^6 \quad (21)$$

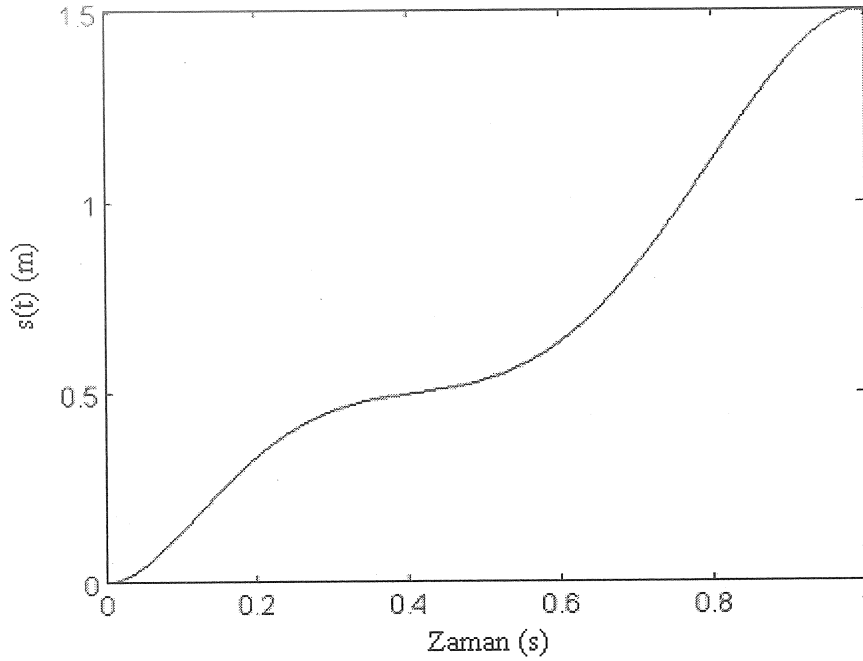
Tekil konumda bağımlı olan denklemin yerine kullanılmak üzere denklem (10)'dan elde edilen yeni denklem aşağıda verilmiştir.

$$B_j \tau_j = Q \quad j = 1, 2 \quad (22)$$

$$B_1 = \dot{A}_{31}^T - \frac{\zeta_2}{b} \dot{A}_{51}^T - \frac{\zeta_2}{b} A_{51}^T \quad (23a)$$

$$B_2 = \dot{A}_{32}^T - \frac{\zeta_2}{b} \dot{A}_{52}^T - \frac{\zeta_2}{b} A_{52}^T \quad (23b)$$

$$Q = M_{33}\ddot{\theta}_2 - \frac{\zeta_2}{b}(M_{51}\ddot{\theta}_1 + M_{52}\ddot{\zeta}_1 + M_{55}\ddot{\theta}_3) + \dot{M}_{33}\dot{\theta}_2 - \frac{\zeta_2}{b}(\dot{M}_{51}\dot{\theta}_1 + \dot{M}_{52}\dot{\zeta}_1 + \dot{M}_{55}\dot{\theta}_3) - \frac{\zeta_2}{b}(M_{51}\ddot{\theta}_1 + M_{52}\ddot{\zeta}_1 + M_{55}\ddot{\theta}_3) - \dot{R}_3 + \frac{\zeta_2}{b}\dot{R}_5 + \frac{\zeta_2}{b}R_5 \quad (23c)$$



Şekil 5. Bağdaşma şartını sağlayan $s(t)$

Bu durumda denklem (11), denklem (5)'in üçüncü (ya da beşinci) satırının denklem (22) ile değiştirilmesi ile elde edilir. Böylece denklem (11)'deki D ve S şu şekli alır:

$$D_{ij}^T = \begin{cases} A_{ij}^T & i=1,2,4,5 \quad j=1,\dots,5 \\ B_j & i=3 \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$$

$$S_i = \begin{cases} M_{ij} \ddot{\eta}_j - R_i & i=1,2,4,5 \\ Q & i=3 \end{cases} \quad (24)$$

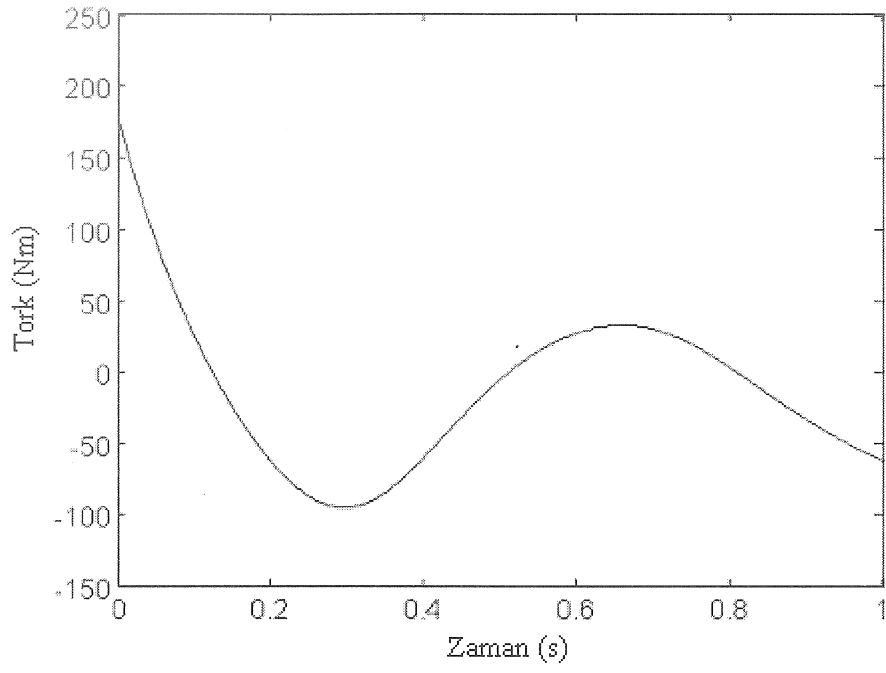
Yörünge, yukarıda açıklandığı gibi bağdaşma şartını sağlayacak şekilde seçildikten sonra ters kinematik çözümü yapılarak η , $\dot{\eta}$ ve $\ddot{\eta}$ elde edilir. Tahrik kuvvetleri (D mafsalı kuvvetleri ile birlikte) tekil konumdan uzak bölgelerde denklem (5)'den, tekil konum civarında ise denklem (11)'den bulunur. Denklem (11)'in kullanıldığı tekil konum civar bölgesi $|\theta_2 - \theta_3 + 180^\circ| < \varepsilon = 0.5^\circ$ olarak alınmıştır. Gereken tahrik kuvvetleri Şekil 6 ve Şekil 7'de verilmektedir. Tekil konumdaki tahrik kuvvetleri $T_1 = 30.31 \text{ Nm}$, $F_1 = 26.37 \text{ N}$ and $F_2 = 1.61 \text{ N}$ olarak bulunmuştur. Sistemin hareketi Şekil 8 ve Şekil 9'da görülmektedir. Değiştirilmiş denklemlerin test edilmesi amacı ile tekil konum

bölgesi $\varepsilon = 1^\circ$ olarak alındığında çözümde önemli sayılabilecek bir görülmemiştir:

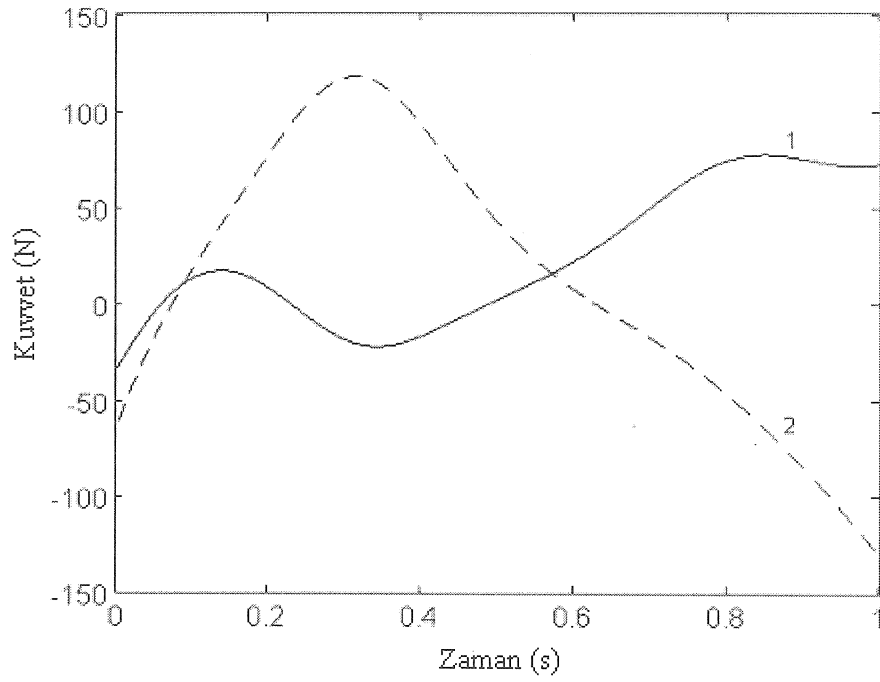
6. SONUÇ

Paralel manipulatörlerin, tahrik ünitelerinin uç elemanını bazı yönlerde kontrol edemediği tahrik tekil konumlarının bulunduğu yerlerde ters dinamik çözümü için genel bir yöntem geliştirilmiştir. Uç elemanının yörüngesinin dinamik denklemleri tekil konumda birbirleri ile bağdaşan denklemler yapacak şekilde seçilmesi halinde yörüngenin gerçekleştirilebileceği, aksi takdirde gerçekleştirilemeyeceği gösterilmiş ve gereken bağdaşma şartları çıkarılmıştır.

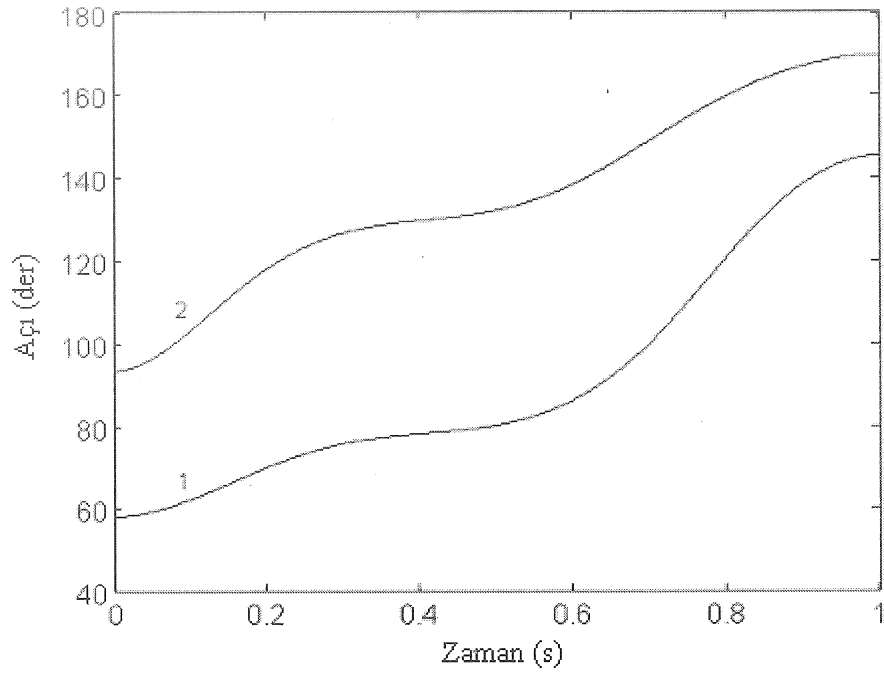
Ayrıca tekil konumlarda dejenere olan dinamik denklemlerden tahrik kuvvetlerini çözebilmek için bağımlı olan denklemin yerine kullanılmak üzere dinamik denklemlerin türevini almak suretiyle yeni bir denklem elde edilmektedir. Bu yaklaşım ile, bilinmeyen kuvvetlerin katsayı matrisinin rankı tam boyuta yükseltilerek çözüm yapılmaktadır. Bu makalede önerilen yöntemlerle paralel manipulatörlerde gereken tahrik kuvvetlerinin zamana göre değişimleri tekil konumların civarında bile elde edilmektedir.



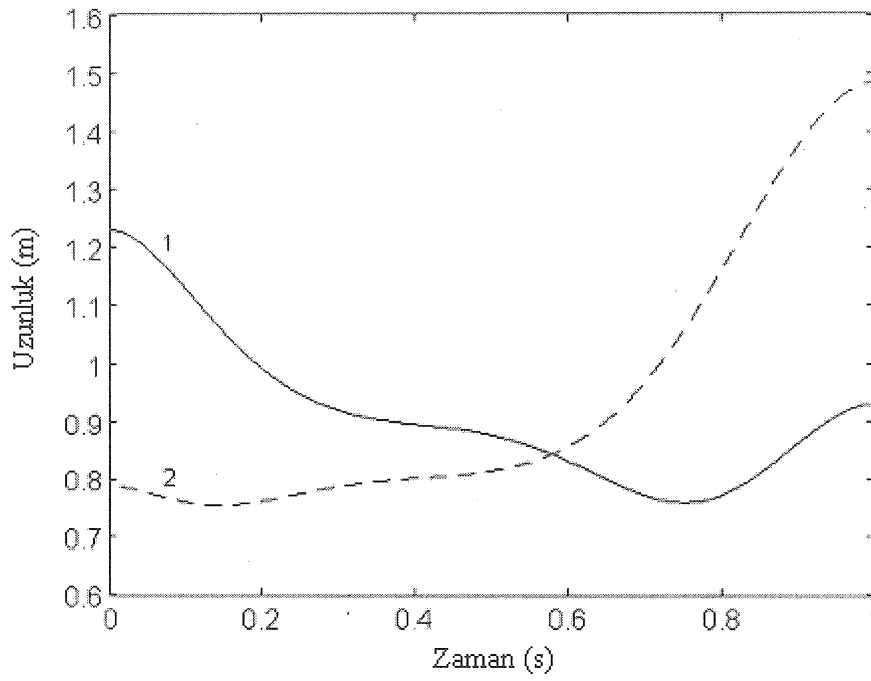
Şekil 6. Bağdaşma şartını sağlayan yörünge için motor torku, T_1



Şekil 7. Bağdaşma şartını sağlayan yörünge için doğrusal tahrik kuvvetleri.
1. F_1 , 2. F_2



Şekil 8. Döner mafsalsal hareketleri. 1. θ_1 , 2. θ_2



Şekil 9. Doğrusal mafsalsal hareketleri. 1. ζ_1 , 2. ζ_2

MOTION OF PARALLEL MANIPULATORS AT DRIVE SINGULAR POSITIONS

There are certain positions of parallel manipulators, called drive singularities, where the actuators lose control of the end-effector in certain directions. At such positions the required actuator forces grow without bounds. Avoiding the drive singular positions is usually not desirable because it limits the utilization of the workspace. It is shown that if the trajectory is planned to satisfy certain consistency conditions the manipulator can pass through the singular positions in a stable fashion. Furthermore the dynamic equations are modified in the neighborhood of the drive singularities. A deployment motion of a 3 dof planar manipulator is analysed to illustrate the proposed approach.

Keywords: Parallel manipulator, inverse dynamics, singularity, drive singularity

REFERENCES

1. Gao F., Li W., Zhao X., Jin Z., Zhao H., "New kinematic structures for 2-, 3-, 4-, and 5-DOF parallel manipulator designs", *Mechanism and Machine Theory* **37**, 1395-1411 (2002).
2. Gunawardana R., Ghorbel F., "PD control of closed-chain mechanical systems: an experimental study", Proc. Of the Fifth IFAC Symposium on Robot Control SYROCO'97, Vol. 1, pp. 79-84, Nantes, France, September 1997.
3. Sefrioui J., Gosselin C. M., "On the quadratic nature of the singularity curves of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators", *Mechanism and Machine Theory* **30**, 533-551 (1995).
4. Daniali H. R. M., Zsombor-Murray P. J., Angeles J., "Singularity analysis of planar parallel manipulators", *Mechanism and Machine Theory* **30**, 665-678 (1995).
5. Alici G., "Determination of singularity contours for five-bar planar parallel manipulators", *Robotica* **18**, 569-575 (2000).
6. Ji Z., "Study of planar three-degree-of-freedom 2-RRR parallel manipulators", *Mechanism and Machine Theory* **38**, 409-416 (2003).
7. Di Gregorio R., "Analytic formulation of the 6-3 fully-parallel manipulator's singularity determination", *Robotica* **19**, 663-667 (2001).
8. St-Onge B. M., Gosselin C., "Singularity analysis and representation of the general Gough-Stewart platform", *Int. Journal of Robotics Research* **19**, 271-288 (2000).
9. Özgören M. K., "Motion Control of Constrained Systems Considering their Actuation-Related Singular Configurations", *IMEchE Part I, Journal of Systems and Control Engineering* **215**, 113-123 (2001).
10. İder S. K., "Inverse Dynamics of Redundant Manipulators Using a Minimum Number of Control Forces", *Journal of Robotic Systems* **12**, 569-579 (1995).
11. İder S. K., "Actuation of Parallel Manipulators in the Presence of Drive Singularities", 11th International Conference on Machine Design and Production, 13-15 October 2004, Antalya, Turkey.